Bab 5: Medan Skalar Klein-Gordon

Pada bab-bab sebelumnya kita telah menyiapkan tiga bahan penting. Dari relativitas khusus, kita memperoleh ruang-waktu Minkowski dan hubungan energi-momentum relativistik. Dari mekanika kuantum, kita memperoleh gagasan bahwa keadaan fisik membawa amplitudo dan bahwa energi serta momentum menjadi operator. Dari teori medan klasik, kita memperoleh prinsip aksi dan persamaan Euler-Lagrange untuk medan.

Bab ini menyatukan ketiga bahan itu dalam contoh paling sederhana: medan skalar Klein-Gordon bebas.

Kata skalar berarti besaran yang tidak memiliki arah internal atau indeks Lorentz. Jika suhu di sebuah ruangan adalah T(t,x), maka T adalah contoh medan skalar klasik: di setiap titik ruang dan waktu ada satu angka. Dalam teori relativistik, medan skalar φ(x) juga memberikan satu angka pada setiap titik ruang-waktu x^μ=(t,x), dan nilainya tidak berubah sebagai komponen vektor ketika kita berpindah ke kerangka Lorentz lain. Lebih tepatnya, untuk transformasi Lorentz x'=Lambda x, medan skalar memenuhi

$$\phi'(x') = \phi(x).$$

Artinya, pengamat berbeda dapat memakai koordinat berbeda untuk peristiwa ruang-waktu yang sama, tetapi nilai medan skalar pada peristiwa itu adalah satu bilangan yang sama. Medan skalar adalah titik awal yang ideal karena tidak membawa komplikasi spinor, indeks vektor, atau redundansi gauge. Karena itu, hampir semua buku QFT memperkenalkan medan Klein-Gordon sebelum fermion dan medan gauge (Peskin & Schroeder, 1995; Schwartz, 2014).

Tujuan bab ini bukan sekadar menulis persamaan Klein-Gordon. Kita ingin memahami mengapa persamaan itu muncul, bagaimana solusinya berbentuk gelombang, apa arti hubungan dispersi energi-momentumnya, dan mengapa teori satu-partikel relativistik tidak cukup sebagai fondasi akhir. Bab berikutnya akan mengambil langkah kuantum penuh: medan φ akan menjadi operator, dan partikel akan muncul sebagai kuanta medan.

5.1 Dari hubungan energi-momentum ke persamaan gelombang relativistik

Dalam relativitas khusus, partikel bebas bermassa m memenuhi hubungan energi-momentum

$$E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4.$$

Jika kita memakai satuan natural, yaitu

$$\hbar = c = 1,$$

maka hubungan itu menjadi lebih ringkas:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2.$$

Satuan natural tidak mengubah fisika. Ia hanya memilih satuan sehingga energi, massa, momentum, dan kebalikan panjang dapat dibandingkan langsung. Dalam bab ini kita akan memakai hbar=c=1, kecuali ketika satuan eksplisit membantu intuisi.

Dalam mekanika kuantum nonrelativistik, energi dan momentum diwakili oleh operator

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} \to -i\nabla.$$

Jika kita menerapkan penggantian ini pada hubungan relativistik $E^2=p^2+m^2$, kita memperoleh

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi = (-i\nabla)^2\,\phi + m^2\phi.$$

Karena $(i\partial_t)^2=-\partial_t^2$ dan $(-i\nabla)^2=-\nabla^2$, persamaan ini menjadi

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\nabla^2\phi + m^2\phi,$$

atau

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0.$$

Inilah persamaan Klein-Gordon untuk medan bebas bermassa m:

$$(\Box + m^2)\phi = 0.$$

Di sini

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

disebut operator d'Alembertian. Kita memakai konvensi metrik Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1).$$

Dengan konvensi ini,

$$\partial_\mu \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_t^2 - \nabla^2.$$

Persamaan Klein-Gordon adalah persamaan gelombang relativistik paling sederhana untuk medan skalar. Ia adalah persamaan orde dua dalam waktu dan ruang, sesuai dengan bentuk kuadrat hubungan energi-momentum relativistik. Dalam formulasi QFT modern, persamaan ini dipahami terutama sebagai persamaan medan klasik yang kemudian dikuantisasi, bukan sebagai persamaan gelombang probabilitas satu-partikel yang lengkap (Weinberg, 1995; Schwartz, 2014).

5.2 Membaca persamaan Klein-Gordon secara fisik

Mari kita uraikan persamaan

$$(\Box + m^2)\phi = 0.$$

Bagian Boxφ adalah bagian gelombang relativistik. Jika m=0, persamaan menjadi

$$\Box\phi = 0,$$

yang merupakan persamaan gelombang untuk medan skalar tak bermassa. Solusinya merambat dengan kecepatan cahaya. Contohnya, gelombang bidang

$$\phi(t, \mathbf{x}) = A\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

memenuhi $\omega=|k|$ ketika $m=0$.

Bagian $m^2\varphi$ mengubah hubungan antara frekuensi dan panjang gelombang. Untuk $m>0$, gelombang tidak lagi memenuhi $\omega=|k|$, melainkan

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2.$$

Inilah versi gelombang dari hubungan relativistik $E^2=p^2+m^2$. Kita akan menurunkannya secara eksplisit sebentar lagi.

Secara intuitif, massa membuat medan “lebih sulit digerakkan” pada panjang gelombang besar. Mode dengan $k=0$, yaitu mode yang seragam di seluruh ruang, tetap berosilasi dengan frekuensi

$$\omega = m.$$

Jadi massa muncul sebagai frekuensi osilasi minimum medan bebas. Dalam satuan biasa, energi diam partikel adalah mc^2, dan hubungan $E=\text{hbar}\omega$ memberikan $\omega=mc^2/\text{hbar}$. Dalam satuan natural, ini menjadi $\omega=m$.

Contoh sederhana: bayangkan medan $\varphi(t,x)$ di seluruh ruang memiliki nilai yang sama pada setiap titik, sehingga tidak ada variasi spasial:

$$\nabla\phi = 0.$$

Persamaan Klein-Gordon menjadi

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + m^2\phi = 0.$$

Ini adalah persamaan osilator harmonik. Solusinya

$$\phi(t) = A\cos(mt) + B\sin(mt).$$

Jadi, bahkan sebelum kuantisasi, medan Klein-Gordon bebas dapat dipandang sebagai kumpulan osilator harmonik: satu osilator untuk setiap mode momentum. Gagasan ini akan menjadi sangat penting pada Bab 6, karena kuantisasi medan bebas pada dasarnya mengkuantisasi tak hingga banyak osilator harmonik, satu untuk setiap momentum (Peskin & Schroeder, 1995; Ryder, 1996).

5.3 Lagrangian medan Klein-Gordon

Dalam teori medan, persamaan gerak biasanya diturunkan dari Lagrangian density, atau rapat Lagrangian. Kita menulisnya sebagai $\mathcal{L}$. Aksi diberikan oleh

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L},$$

dengan

$$d^4x = dt \, d^3x.$$

Untuk medan skalar real bebas, rapat Lagrangian Klein-Gordon adalah

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi \, \partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2.$$

Mari kita baca persamaan ini perlahan.

Suku pertama,

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\phi \, \partial^\mu\phi,$$

adalah suku kinetik medan. Dalam notasi waktu dan ruang,

$$\partial_\mu\phi \, \partial^\mu\phi = (\partial_t\phi)^2 - (\nabla\phi)^2.$$

Jadi Lagrangian dapat ditulis sebagai

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Suku $(1)/(2)(\partial_t\varphi)^2$ menyerupai energi kinetik osilator. Suku $(1)/(2)(\nabla\varphi)^2$ menghukum perubahan spasial medan: konfigurasi medan yang berubah sangat tajam dari titik ke titik memerlukan energi besar. Suku $(1)/(2)m^2\varphi^2$ adalah suku massa, analog dengan potensial osilator harmonik.

Untuk memperoleh persamaan gerak, kita memakai persamaan Euler-Lagrange medan:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0.$$

Untuk Lagrangian Klein-Gordon,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2\phi,$$

dan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi.$$

Maka

$$-m^2\phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0.$$

Kalikan dengan -1:

$$(\Box + m^2)\phi = 0.$$

Jadi persamaan Klein-Gordon bukan hanya hasil menebak dari hubungan energi-momentum. Ia juga muncul dari prinsip aksi relativistik dengan Lagrangian paling sederhana yang lokal, Lorentz-invariant, kuadratik dalam medan, dan mengandung turunan paling rendah yang menghasilkan dinamika gelombang (Peskin & Schroeder, 1995; Schwartz, 2014).

Kata bebas berarti Lagrangian hanya kuadratik dalam φ. Tidak ada suku seperti $\lambda\varphi^4$, $g\varphi^3$, atau kopling ke medan lain. Dalam teori bebas, mode-mode momentum tidak saling bertukar energi. Dalam teori berinteraksi, suku tambahan membuat mode-mode medan dapat saling memengaruhi, dan setelah kuantisasi hal itu dibaca sebagai hamburan, penciptaan, atau pemusnahan partikel.

5.4 Solusi gelombang bidang

Untuk memahami isi persamaan Klein-Gordon, kita cari solusi berbentuk gelombang bidang:

$$\phi(x) = Ae^{-ip\cdot x}.$$

Di sini A adalah amplitudo konstan, dan

$$p^\mu = (E, \mathbf{p})$$

adalah empat-momentum. Dengan konvensi metrik (+,-,-,-),

$$p \cdot x = p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

Maka

$$e^{-ip\cdot x} = e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}.$$

Sekarang terapkan operator Klein-Gordon:

$$(\Box + m^2)e^{-ip\cdot x} = 0.$$

Karena

$$\partial_\mu e^{-ip\cdot x} = -ip_\mu e^{-ip\cdot x},$$

maka

$$\Box e^{-ip\cdot x} = \partial_\mu \partial^\mu e^{-ip\cdot x} = -p_\mu p^\mu e^{-ip\cdot x}.$$

Jadi persamaan Klein-Gordon memberi

$$(-p_\mu p^\mu + m^2) e^{-ip\cdot x} = 0.$$

Agar solusinya tidak nol, harus berlaku

$$p_\mu p^\mu = m^2.$$

Karena

$$p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2,$$

kita memperoleh

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2,$$

atau

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2.$$

Inilah hubungan dispersi medan Klein-Gordon. Istilah hubungan dispersi berarti hubungan antara frekuensi dan bilangan gelombang, atau dalam bahasa kuantum antara energi dan momentum. Untuk gelombang bidang,

$$E = \omega, \qquad \mathbf{p} = \mathbf{k}$$

dalam satuan natural. Maka

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2.$$

Ada dua cabang solusi energi:

$$E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

dan

$$E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Cabang energi negatif ini adalah tanda pertama bahwa interpretasi satu-partikel relativistik tidak sesederhana mekanika kuantum nonrelativistik. Dalam QFT, cabang-cabang ini tidak dibuang begitu saja. Setelah kuantisasi medan, struktur frekuensi positif dan negatif akan ditafsirkan ulang melalui operator penciptaan dan pemusnahan, sehingga teori memiliki spektrum energi fisik yang positif (Weinberg, 1995; Peskin & Schroeder, 1995).

5.5 Frekuensi positif dan frekuensi negatif

Karena persamaan Klein-Gordon orde dua dalam waktu, jika

$$e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

adalah solusi dengan E>0, maka

$$e^{+iEt-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

juga solusi. Kita sering menyebut yang pertama sebagai mode frekuensi positif dan yang kedua sebagai mode frekuensi negatif, meskipun istilah ini bergantung pada pilihan koordinat waktu dalam kerangka inersial tertentu.

Untuk medan skalar real, solusi umum dapat ditulis secara informal sebagai superposisi

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x} + a^*(\mathbf{p}) e^{+ip\cdot x} \right],$$

dengan

$$p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Koefisien kedua adalah kompleks konjugat koefisien pertama agar φ(x) real. Jika φ real, maka φ^=φ, sehingga mode e⁽-ip· x⁾ dan e⁽+ip· x⁾ tidak independen penuh.

Dalam bentuk yang lebih standar untuk normalisasi relativistik, kita menulis

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[a(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x} + a^*(\mathbf{p}) e^{+ip\cdot x} \right].$$

Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}$$

dipilih karena akan membuat normalisasi kuantum dan ukuran ruang fase relativistik lebih rapi pada bab-bab berikutnya. Faktor ini bukan dekorasi; ia terkait dengan cara ukuran momentum Lorentz-invariant ditulis sebagai

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}.$$

Ukuran ini akan muncul lagi ketika kita menghitung penampang lintang dan laju peluruhan.

Contoh: jika hanya ada satu mode momentum p, medan real dapat berbentuk

$$\phi(x) = A\cos(E_{\mathbf{p}} t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \delta),$$

dengan fase δ. Bentuk kosinus ini sebenarnya adalah gabungan dari dua eksponensial kompleks:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}).$$

Jadi medan real secara alami memuat pasangan mode frekuensi positif dan negatif.

5.6 Kecepatan fase, kecepatan grup, dan kausalitas

Gelombang bidang memiliki fase

$$\theta = \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t.$$

Permukaan fase konstan bergerak dengan kecepatan fase

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}.$$

Untuk medan Klein-Gordon bermassa,

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2},$$

sehingga

$$v_{\text{fase}} = \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}{|\mathbf{k}|}.$$

Jika m>0, maka

$$v_{\text{fase}} > 1.$$

Apakah ini melanggar relativitas? Tidak. Kecepatan fase bukan kecepatan sinyal fisik. Sinyal atau paket gelombang bergerak dengan kecepatan grup, yaitu

$$v_{\text{grup}} = \frac{d\omega}{d|\mathbf{k}|}.$$

Untuk hubungan dispersi Klein-Gordon,

$$v_{\text{grup}} = \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}.$$

Karena

$$\frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} < 1$$

untuk m>0, paket gelombang bermassa bergerak lebih lambat daripada cahaya. Untuk m=0,

$$v_{\text{grup}} = 1.$$

Ini selaras dengan relativitas khusus. Dalam teori medan kuantum penuh, kausalitas dinyatakan lebih tajam melalui syarat bahwa operator medan pada pemisahan ruang-like harus komutatif, sehingga pengukuran lokal di daerah yang tidak dapat saling memengaruhi secara kausal tidak dapat mengirim sinyal lebih cepat daripada cahaya. Struktur ini akan menjadi lebih jelas setelah kuantisasi kanonik dan propagator dibahas pada Bab 6 dan Bab 7 (Weinberg, 1995; Schwartz, 2014).

5.7 Energi medan Klein-Gordon

Sekarang kita lihat energi medan klasiknya. Dari Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

momentum kanonik medan adalah

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi.$$

Di sini π(x) bukan momentum spasial partikel, melainkan momentum kanonik yang berpasangan dengan medan φ(x). Dalam mekanika klasik biasa, jika koordinatnya q(t), momentum kanoniknya adalah

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

Dalam teori medan, koordinatnya adalah nilai medan di setiap titik ruang, φ(t,x). Karena itu momentum kanoniknya juga merupakan medan, yaitu π(t,x).

Rapat Hamiltonian diberikan oleh

$$\mathcal{H} = \pi \partial_t \phi - \mathcal{L}.$$

Karena $\pi = \partial_t \varphi$, kita memperoleh

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Energi total medan adalah

$$H = \int d^3x \, \mathcal{H}.$$

Untuk medan real dengan $m^2 \geq 0$, setiap suku dalam □ nonnegatif:

$$\frac{1}{2}\pi^2 \geq 0, \qquad \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \geq 0, \qquad \frac{1}{2}m^2\phi^2 \geq 0.$$

Jadi energi klasik medan Klein-Gordon bebas bernilai positif atau nol. Ini penting: meskipun solusi persamaan gelombangnya memiliki mode $e^{(+iEt)}$ dan $e^{(-iEt)}$, energi medan klasik tidak otomatis menjadi tak berbatas bawah. Masalah “energi negatif” terutama muncul ketika kita mencoba membaca persamaan Klein-Gordon sebagai persamaan gelombang satu-partikel dengan energi $E = \pm\sqrt{(p^2+m^2)}$. Dalam teori medan, struktur Hamiltonian memberikan cara yang lebih stabil untuk memahami energi (Peskin & Schroeder, 1995).

5.8 Medan real dan medan kompleks

Sampai sekarang kita membahas medan skalar real:

$$\phi^* = \phi.$$

Medan real cocok untuk partikel netral, yaitu partikel yang identik dengan antipartikelnya dalam teori kuantum. Contoh fisik yang sering dipakai sebagai analog adalah medan skalar netral ideal. Dalam Model Standar, medan Higgs sebelum memilih gauge memiliki struktur lebih kaya daripada satu medan real, tetapi setelah pematahan simetri elektrolemah terdapat boson Higgs fisik netral yang sering diperkenalkan secara pedagogis melalui medan skalar real (Schwartz, 2014).

Kita juga dapat memiliki medan skalar kompleks φ, dengan φ dan φ^ dianggap sebagai derajat kebebasan independen. Lagrangian bebasnya adalah

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi.$$

Persamaan geraknya adalah

$$(\Box + m^2)\phi = 0,$$

dan juga

$$(\Box + m^2)\phi^* = 0.$$

Mengapa medan kompleks penting? Karena ia dapat membawa muatan terkonservasi. Lagrangian di atas invariant terhadap transformasi fase global

$$\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x),$$

$$\phi^*(x) \to e^{-i\alpha}\phi^*(x),$$

dengan α konstan. Transformasi ini disebut simetri global U(1). Menurut teorema Noether, simetri kontinu seperti ini menghasilkan arus terkonservasi. Untuk medan skalar kompleks, arus Noether-nya adalah

$$j^\mu = i\left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*\right).$$

Arus ini memenuhi

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

jika persamaan gerak berlaku. Muatan totalnya

$$Q = \int d^3x \, j^0$$

konstan terhadap waktu.

Namun ada pelajaran penting: j^0 tidak selalu positif. Karena itu, j^0 tidak dapat secara umum ditafsirkan sebagai rapat probabilitas satu-partikel. Dalam teori medan kuantum, Q ditafsirkan sebagai muatan, bukan probabilitas. Partikel dan antipartikel memiliki muatan berlawanan. Ini adalah salah satu jembatan menuju bahasa QFT: medan kompleks setelah kuantisasi secara alami menggambarkan kuanta bermuatan dan antikuanta bermuatan lawan (Ryder, 1996; Weinberg, 1995).

Contoh sederhana: jika suatu medan kompleks menggambarkan partikel bermuatan +q, maka eksitasi antipartikelnya membawa muatan -q. Pada tingkat medan klasik, pasangan ini tersirat dalam adanya φ dan φ^. Pada tingkat kuantum, ia muncul melalui dua jenis operator: satu untuk menciptakan partikel, satu untuk menciptakan antipartikel.

5.9 Mengapa interpretasi satu-partikel bermasalah?

Secara historis dan pedagogis, godaan pertama adalah membaca persamaan Klein-Gordon sebagai analog relativistik dari persamaan Schrödinger. Dalam mekanika kuantum nonrelativistik, persamaan Schrödinger

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\nabla^2}{2m}\psi$$

memiliki rapat probabilitas

$$\rho = |\psi|^2,$$

yang selalu nonnegatif. Jika ψ dinormalisasi sehingga

$$\int d^3x\, |\psi|^2 = 1,$$

maka $|\psi(t,x)|^2$ dapat dibaca sebagai rapat probabilitas menemukan partikel di sekitar x pada waktu t.

Untuk Klein-Gordon, persamaan geraknya orde dua dalam waktu:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0.$$

Karena orde dua dalam waktu, untuk menentukan solusi kita perlu memberikan dua data awal:

$$\phi(t_0, \mathbf{x})$$

dan

$$\partial_t \phi(t_0, \mathbf{x}).$$

Ini berbeda dari persamaan Schrödinger, yang orde satu dalam waktu dan hanya memerlukan $\psi(t_0,x)$. Perbedaan ini sendiri belum fatal, tetapi ia mengubah struktur probabilitas.

Untuk medan kompleks, kita memiliki arus terkonservasi

$$j^\mu = i \left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \right).$$

Komponen waktunya adalah

$$j^0 = i \left(\phi^* \partial_t \phi - \phi \partial_t \phi^* \right).$$

Jika kita ingin menafsirkan j^0 sebagai rapat probabilitas, ia harus selalu nonnegatif. Tetapi tidak demikian.

Ambil solusi gelombang bidang frekuensi positif

$$\phi(x) = Ae^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \qquad E > 0.$$

Maka

$$\partial_t \phi = -iE\phi.$$

Substitusi ke j^0 menghasilkan

$$j^0 = 2E|A|^2,$$

positif.

Tetapi untuk solusi frekuensi negatif

$$\phi(x) = Ae^{+iEt-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \qquad E > 0,$$

kita memperoleh

$$\partial_t \phi = +iE\phi,$$

sehingga

$$j^0 = -2E|A|^2.$$

Jadi kuantitas yang terkonservasi ini tidak positif definit. Ia lebih cocok dibaca sebagai rapat muatan, karena muatan boleh positif atau negatif. Ini adalah alasan matematis sederhana mengapa interpretasi probabilitas satu-partikel untuk persamaan Klein-Gordon tidak sebersih persamaan Schrödinger (Peskin & Schroeder, 1995; Ryder, 1996).

Ada juga alasan fisik yang lebih dalam. Dalam relativitas, energi yang cukup besar dapat menciptakan pasangan partikel-antipartikel. Jika kita mencoba memaksa jumlah partikel tetap satu, kita akan kehilangan proses fisik yang sah, seperti

$$\gamma + \gamma \to e^- + e^+$$

dalam teori yang melibatkan elektromagnetisme, atau analog skalar dalam teori medan berinteraksi. Mekanika kuantum satu-partikel dapat berguna sebagai pendekatan pada energi rendah ketika penciptaan pasangan dapat diabaikan, tetapi ia bukan kerangka umum untuk fisika relativistik. Teori medan kuantum menyelesaikan masalah ini dengan menjadikan jumlah partikel sebagai besaran dinamis: keadaan dapat berupa nol, satu, dua, atau banyak kuanta medan (Weinberg, 1995; Schwartz, 2014).

5.10 Interpretasi partikel: dari mode medan ke kuanta

Pada tahap klasik, solusi medan Klein-Gordon adalah superposisi mode gelombang. Kita dapat menulis medan real bebas sebagai

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[a(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x} + a^*(\mathbf{p}) e^{+ip\cdot x} \right].$$

Di sini a(p) hanyalah koefisien kompleks klasik. Ia memberi tahu seberapa besar mode momentum p hadir dalam konfigurasi medan.

Pada Bab 6, kita akan melakukan kuantisasi kanonik. Secara ringkas, medan dan momentum kanoniknya akan dipromosikan menjadi operator:

$$\phi(t, \mathbf{x}) \to \hat{\phi}(t, \mathbf{x}),$$

$$\pi(t, \mathbf{x}) \to \hat{\pi}(t, \mathbf{x}).$$

Koefisien mode juga menjadi operator:

$$a(\mathbf{p}) \to \hat{a}(\mathbf{p}),$$

$$a^*(\mathbf{p}) \to \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}).$$

Operator hata^†(p) akan menciptakan satu kuanta medan dengan momentum p, sedangkan hata(p) akan memusnahkannya. Kuanta medan inilah yang kita sebut partikel.

Dengan demikian, partikel tidak dimasukkan dari awal sebagai bola kecil yang bergerak pada lintasan tertentu. Partikel muncul sebagai eksitasi diskrit dari medan kuantum. Untuk medan Klein-Gordon real, eksitasi tersebut adalah boson skalar netral. Untuk medan Klein-Gordon kompleks, setelah kuantisasi akan muncul partikel dan antipartikel dengan muatan berlawanan (Peskin & Schroeder, 1995; Schwartz, 2014).

Contoh analogi yang cukup akurat adalah tali bergetar. Secara klasik, tali memiliki mode normal: nada dasar, nada pertama, nada kedua, dan seterusnya. Secara kuantum, setiap mode dapat memiliki jumlah kuanta energi diskrit. Dalam medan Klein-Gordon, “tali” itu bukan satu objek berdimensi satu, melainkan medan yang memenuhi seluruh ruang. Setiap momentum p adalah satu mode, dan setiap mode dapat memiliki jumlah kuanta tertentu.

Namun analogi ini harus dibatasi. Tali biasa hidup di dalam ruang. Medan relativistik adalah objek yang didefinisikan pada ruang-waktu dan harus mematuhi simetri Lorentz. Selain itu, dalam teori berinteraksi, konsep partikel paling jelas untuk keadaan asimtotik jauh sebelum dan jauh sesudah hamburan, bukan selalu sebagai benda lokal tajam di setiap saat.

5.11 Batas nonrelativistik

Medan Klein-Gordon harus mengandung mekanika kuantum nonrelativistik sebagai pendekatan ketika energi kinetik jauh lebih kecil daripada massa. Mari kita lihat bagaimana ini terjadi.

Energi relativistik adalah

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Untuk |p|ll m, kita dapat mengembangkan akar:

$$E_{\mathbf{p}} = m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3} + \cdots .$$

Suku pertama m adalah energi diam. Suku kedua $p^2/(2m)$ adalah energi kinetik nonrelativistik. Jadi, pada momentum kecil, hubungan energi-momentum Klein-Gordon mengandung hubungan Schrödinger.

Kita juga dapat melihatnya pada tingkat medan. Misalkan medan kompleks φ ditulis sebagai osilasi cepat karena energi diam, dikalikan amplop lambat ψ:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-imt} \psi(t, \mathbf{x}).$$

Jika ψ berubah lambat dibandingkan skala waktu 1/m, maka substitusi ke persamaan Klein-Gordon menghasilkan, pada orde terendah,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\nabla^2}{2m} \psi.$$

Ini adalah persamaan Schrödinger bebas. Dengan kata lain, mekanika kuantum nonrelativistik muncul sebagai batas energi rendah dari teori relativistik, setelah energi diam m dipisahkan dari dinamika lambat (Schwartz, 2014).

Pelajaran pentingnya: persamaan Schrödinger bukan saingan persamaan Klein-Gordon. Ia adalah pendekatan yang sangat baik ketika kecepatan jauh lebih kecil daripada cahaya dan proses penciptaan pasangan tidak relevan. Teori medan relativistik memberi kerangka yang lebih umum; mekanika kuantum nonrelativistik muncul sebagai limit.

5.12 Massa nol, massa positif, dan massa kuadrat negatif

Dalam Lagrangian Klein-Gordon,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2,$$

parameter m^2 menentukan bentuk potensial klasik

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

Jika $m^2>0$, potensial minimum berada di

$$\phi = 0,$$

dan fluktuasi kecil di sekitar minimum memiliki frekuensi positif

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2.$$

Ini adalah kasus medan skalar bebas stabil.

Jika m=0, potensialnya datar secara kuadratik:

$$V(\phi) = 0$$

untuk medan bebas tanpa interaksi. Persamaan geraknya

$$\Box\phi = 0.$$

Mode bermomentum k memiliki

$$\omega = |\mathbf{k}|.$$

Jika $m^2<0$, sering ditulis

$$m^2 = -\mu^2, \qquad \mu^2 > 0.$$

Persamaan dispersi menjadi

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 - \mu^2.$$

Untuk mode dengan

$$|\mathbf{k}| < \mu,$$

nilai ω^2 negatif. Ini berarti frekuensi ω imajiner, sehingga solusi tidak berosilasi stabil tetapi tumbuh atau meluruh secara eksponensial. Dalam teori medan, ini bukan berarti ada partikel yang bergerak lebih cepat daripada cahaya. Istilah lama “tachyonic mass” kadang muncul, tetapi interpretasi modernnya adalah bahwa titik φ=0 bukan vakum stabil; medan ingin bergeser ke konfigurasi lain. Gagasan ini akan menjadi penting pada Bab 18 ketika kita membahas pematahan simetri spontan dan potensial “Mexican hat” (Peskin & Schroeder, 1995; Schwartz, 2014).

Contoh sederhana dari mekanika klasik membantu. Jika potensial osilator adalah

$$V(q) = \frac{1}{2}m^2q^2$$

dengan $m^2>0$, titik $q=0$ adalah minimum stabil. Tetapi jika

$$V(q) = -\frac{1}{2}\mu^2q^2,$$

maka $q=0$ adalah puncak bukit, bukan lembah. Benda yang diletakkan tepat di puncak secara ideal bisa diam, tetapi gangguan kecil membuatnya jatuh menjauh. Medan dengan $m^2<0$ memiliki instabilitas serupa di sekitar $\varphi=0$.

5.13 Apa yang sudah kita capai?

Kita sekarang memiliki medan relativistik bebas paling sederhana. Struktur utamanya dapat diringkas sebagai berikut.

Medan sk

Document information

Bab 5: Medan Skalar Klein-Gordon

Project	Teori Medan Kuantum
Document	Document 1.9
Author	Isti_26
Verifier	Not verified
Downloaded	July 05, 2026 21:28 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/teori-medan-kuantum/documents/bab-5-medan--skalar-klein-gordon/