Bab 4: Medan Klasik dan Prinsip Aksi

Pada bab-bab sebelumnya kita sudah menyiapkan dua bahasa dasar: relativitas khusus dan mekanika kuantum. Namun sebelum medan dapat dikuantisasi, kita perlu memahami medan sebagai sistem klasik. Ini bukan langkah sampingan. Hampir semua teori medan kuantum modern dimulai dari sebuah Lagrangian klasik, lalu Lagrangian itu digunakan untuk menentukan persamaan gerak, simetri, arus kekekalan, propagator, dan aturan Feynman. Dengan kata lain, bahasa klasik yang kita bangun di bab ini akan menjadi kerangka kerja utama untuk bab-bab berikutnya (Srednicki, 2007; Schwartz, 2014).

Tujuan bab ini sederhana tetapi fundamental. Kita akan memahami apa itu medan, bagaimana menuliskan aksi untuk medan, bagaimana memperoleh persamaan gerak dari prinsip aksi stasioner, dan mengapa simetri menghasilkan hukum kekekalan melalui teorema Noether. Semua ini akan dilakukan dalam konteks klasik terlebih dahulu. Kata “klasik” di sini berarti medan masih dianggap sebagai fungsi biasa, bukan operator kuantum.

4.1 Dari partikel ke medan

Dalam mekanika klasik biasa, sistem sederhana seperti partikel titik dijelaskan oleh sejumlah kecil koordinat. Misalnya, sebuah partikel di ruang tiga dimensi mempunyai posisi

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Pada setiap waktu t, keadaan konfigurasi partikel ditentukan oleh tiga angka. Jika kita punya N partikel, kita memerlukan 3N angka posisi. Jumlah derajat kebebasan masih berhingga.

Derajat kebebasan adalah jumlah informasi independen yang dibutuhkan untuk menentukan konfigurasi sistem. Untuk satu partikel di garis lurus, derajat kebebasannya satu, yaitu x(t). Untuk satu partikel di ruang tiga dimensi, derajat kebebasannya tiga. Untuk sistem banyak partikel, jumlahnya bertambah.

Medan berbeda. Sebuah medan adalah besaran yang memiliki nilai di setiap titik ruang, dan biasanya juga berubah terhadap waktu. Contohnya, suhu dalam ruangan dapat ditulis sebagai

$$T(\mathbf{x}, t),$$

yang berarti: pada posisi x dan waktu t, suhu bernilai T. Medan skalar sederhana dapat ditulis sebagai

$$\phi(\mathbf{x}, t).$$

Kata skalar berarti nilai medan tidak memiliki arah internal seperti vektor. Pada setiap titik ruang-waktu, φ hanya sebuah angka. Contoh fisik klasiknya adalah medan tekanan dalam fluida atau medan ketinggian permukaan air jika kita melihat gelombang air secara ideal.

Perbedaan besar dari partikel titik adalah ini: medan memiliki derajat kebebasan kontinu. Untuk mengetahui konfigurasi φ(x, t) pada satu waktu, kita perlu mengetahui nilainya di semua titik ruang. Dalam arti matematis, ini seperti memiliki tak hingga banyak koordinat, satu koordinat untuk setiap titik ruang. Gagasan medan sebagai sistem dengan derajat kebebasan tak hingga adalah salah satu fondasi teori medan klasik dan teori medan kuantum (Srednicki, 2007; Schwartz, 2014).

Contoh yang baik adalah rantai massa dan pegas.

Bayangkan banyak massa kecil disusun sepanjang garis. Setiap massa dapat bergerak naik-turun. Jika massa ke-n memiliki simpangan $q_n(t)$, maka sistemnya dijelaskan oleh banyak koordinat:

$$q_1(t), q_2(t), q_3(t), \ldots$$

Jika jarak antar-massa dibuat sangat kecil, kita tidak lagi ingin menamai setiap massa satu per satu. Kita mengganti indeks diskret n dengan posisi kontinu x. Simpangan $q_n(t)$ berubah menjadi medan

$$\phi(x, t).$$

Dalam batas kontinu, rantai pegas menjadi sistem medan. Gelombang pada tali adalah contoh klasik dari medan satu dimensi.

4.2 Medan sebagai fungsi ruang-waktu

Dalam teori relativistik, ruang dan waktu tidak dipisahkan secara mutlak. Kita menulis koordinat ruang-waktu sebagai

$$x^\mu = (t, x, y, z),$$

dengan indeks Yunani $\mu = 0,1,2,3$. Dalam satuan alami, kita sering mengambil $c = 1$, sehingga waktu dan jarak dapat diukur dalam satuan yang sepadan. Konvensi metrik yang akan kita gunakan adalah

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Dengan konvensi ini,

$$x^\mu x_\mu = t^2 - \mathbf{x}^2.$$

Medan skalar relativistik ditulis sebagai

$$\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x}).$$

Notasi $\varphi(x)$ berarti medan sebagai fungsi ruang-waktu, bukan hanya posisi. Jika medan tersebut adalah skalar Lorentz, nilainya di suatu peristiwa ruang-waktu tidak berubah sebagai komponen vektor ketika kita melakukan transformasi Lorentz. Secara lebih tepat, untuk transformasi Lorentz $x \mapsto x'$, medan skalar memenuhi

$$\phi'(x') = \phi(x).$$

Artinya, dua pengamat inersial dapat memakai koordinat berbeda, tetapi mereka sepakat tentang nilai medan skalar pada peristiwa fisik yang sama.

Tidak semua medan adalah skalar. Medan elektromagnetik, misalnya, memiliki struktur vektor/tensor. Medan Dirac untuk fermion memiliki struktur spinor. Namun medan skalar adalah tempat terbaik untuk belajar karena matematikanya paling sederhana, sementara ide-ide utamanya sudah muncul: aksi, persamaan gerak, propagasi, simetri, dan kuantisasi.

4.3 Lagrangian: dari mekanika partikel ke medan

Dalam mekanika klasik, banyak sistem dapat dirumuskan memakai Lagrangian

$$L(q, \dot{q}, t),$$

yaitu fungsi dari koordinat q, kecepatan dot q, dan waktu. Untuk partikel bermassa m dalam potensial V(q), Lagrangian biasanya

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q).$$

Bagian pertama adalah energi kinetik, bagian kedua adalah energi potensial. Persamaan gerak Newton dapat diperoleh dari prinsip aksi stasioner, bukan harus langsung diasumsikan. Formulasi Lagrangian ini adalah salah satu bentuk utama mekanika klasik modern (Goldstein, Poole, & Safko, 2002).

Untuk medan, koordinat q(t) diganti oleh fungsi φ(x,t). Karena medan memiliki nilai di setiap titik ruang, kita tidak menulis satu Lagrangian sebagai fungsi beberapa koordinat saja. Kita menulis kerapatan Lagrangian, atau Lagrangian density, yang dilambangkan

$$\mathcal{L}.$$

Kerapatan Lagrangian bergantung pada medan dan turunannya:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x).$$

Di sini

$$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}.$$

Dengan x^0=t, kita punya

$$\partial_0 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

sedangkan ∂_i φ untuk i=1,2,3 adalah turunan ruang.

Lagrangian total diperoleh dengan mengintegralkan kerapatan Lagrangian atas ruang:

$$L(t) = \int d^3x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

Kemudian aksi, seperti dalam mekanika klasik, adalah integral waktu dari Lagrangian:

$$S = \int dt\, L(t).$$

Dalam bentuk ruang-waktu empat dimensi,

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}.$$

Ini adalah bentuk yang sangat penting. Dalam teori medan relativistik, kita ingin aksi S bersifat invarian Lorentz. Karena d^4x invarian di bawah transformasi Lorentz proper, biasanya kita memilih ▯ sebagai skalar Lorentz agar aksi tidak bergantung pada kerangka inersial yang dipakai (Srednicki, 2007; Schwartz, 2014).

4.4 Contoh pertama: medan skalar real

Medan skalar real paling sederhana memiliki Lagrangian density

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - V(\phi).$$

Mari kita baca persamaan ini secara perlahan.

Suku

$$\frac{1}{2}\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi$$

adalah suku kinetik relativistik. Dengan metrik (+---),

$$\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi = (\partial_t \phi)^2 - |\nabla \phi|^2.$$

Jadi Lagrangian density menjadi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 - V(\phi).$$

Suku $(\partial_t\varphi)^2$ mengukur perubahan medan terhadap waktu. Suku $|\nabla\varphi|^2$ mengukur perubahan medan dari titik ke titik di ruang. Jika medan sangat “bergelombang” secara spasial, energi biasanya lebih besar. Suku V(φ) adalah potensial lokal, yaitu energi potensial yang bergantung pada nilai medan.

Contoh potensial yang sangat penting adalah

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Maka

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Ini adalah Lagrangian medan skalar bebas bermassa. Kata bebas berarti belum ada interaksi nonlinier seperti φ^4. Lagrangian ini akan menjadi pusat Bab 5 saat kita mempelajari medan Klein-Gordon.

Jika kita menambahkan

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

maka medan memiliki interaksi diri. Istilah φ^4 akan menjadi contoh penting dalam teori perturbasi dan renormalisasi nanti. Tetapi untuk saat ini, kita fokus pada struktur klasiknya.

4.5 Prinsip aksi stasioner

Dalam mekanika klasik, lintasan fisik adalah lintasan yang membuat aksi stasioner. Kata stasioner bukan berarti aksi harus minimum. Artinya, perubahan kecil lintasan tidak mengubah aksi pada orde pertama. Prinsip ini biasanya disebut prinsip Hamilton atau prinsip aksi stasioner (Goldstein, Poole, & Safko, 2002).

Untuk partikel, kita memvariasikan lintasan q(t). Untuk medan, kita memvariasikan fungsi medan φ(x). Kita membandingkan konfigurasi medan asli φ(x) dengan konfigurasi sedikit berbeda

$$\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x),$$

di mana δφ(x) adalah perubahan kecil.

Prinsip aksi stasioner menyatakan:

$$\delta S = 0$$

untuk semua variasi kecil δφ(x) yang hilang di batas daerah integrasi.

Mengapa variasi di batas dianggap hilang? Karena kita ingin membandingkan semua kemungkinan sejarah medan yang memiliki kondisi batas sama. Dalam mekanika partikel, ini seperti membandingkan lintasan yang mulai dan berakhir di titik yang sama. Dalam teori medan, kita membandingkan konfigurasi medan yang sama di batas ruang-waktu, tetapi berbeda di bagian dalamnya.

4.6 Menurunkan persamaan Euler-Lagrange medan

Sekarang kita turunkan persamaan gerak medan. Misalkan

$$S[\phi] = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

Tanda kurung siku pada S[φ] mengingatkan bahwa aksi adalah fungsional. Fungsi biasa mengambil angka dan menghasilkan angka. Fungsional mengambil fungsi dan menghasilkan angka. Contoh sederhana: aksi mengambil seluruh konfigurasi medan φ(x), lalu menghasilkan satu nilai S.

Jika medan berubah

$$\phi \to \phi + \delta\phi,$$

maka perubahan aksi pada orde pertama adalah

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right].$$

Karena variasi dan turunan saling komutatif,

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta\phi).$$

Jadi

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right].$$

Suku kedua kita integrasi parsial:

$$\int d^4x \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) = \int d^4x \, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] - \int d^4x \, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi.$$

Suku pertama di kanan adalah suku batas. Karena $\delta\varphi$ diambil hilang di batas, suku itu tidak berkontribusi. Maka

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi.$$

Agar $\delta S=0$ untuk semua variasi $\delta\varphi$, koefisien $\delta\varphi$ harus nol. Maka kita memperoleh persamaan Euler-Lagrange medan:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0.}$$

Untuk banyak medan φ_a, dengan indeks a menamai jenis atau komponen medan, persamaannya menjadi

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) = 0.}$$

Persamaan ini adalah analog medan dari persamaan Euler-Lagrange dalam mekanika klasik. Ia menjadi alat pertama setiap kali kita diberi Lagrangian dan diminta mencari dinamika klasiknya (Srednicki, 2007; Schwartz, 2014).

4.7 Contoh: persamaan gerak medan skalar

Ambil

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - V(\phi).$$

Kita hitung dua bagian dalam persamaan Euler-Lagrange.

Pertama,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{dV}{d\phi}.$$

Kedua,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi.$$

Maka persamaan Euler-Lagrange menjadi

$$-\frac{dV}{d\phi} - \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0.$$

Atau

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0.}$$

Operator

$$\partial_\mu \partial^\mu$$

sering ditulis sebagai

$$\Box,$$

dibaca "d'Alembertian". Dengan konvensi metrik kita,

$$\Box = \partial_t^2 - \nabla^2.$$

Jadi persamaan geraknya adalah

$$\Box\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0.$$

Jika

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

maka

$$\frac{dV}{d\phi} = m^2\phi.$$

Persamaan geraknya menjadi

$$\boxed{(\Box + m^2)\phi = 0.}$$

Ini adalah persamaan Klein-Gordon untuk medan skalar bebas bermassa. Kita akan membahas makna fisiknya secara lebih lengkap pada Bab 5.

Sebagai contoh lain, jika

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

maka

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{\lambda}{3!}\phi^3.$$

Persamaan geraknya menjadi

$$\Box\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 = 0.$$

Ini persamaan nonlinier. Kata nonlinier berarti medan muncul dengan pangkat lebih dari satu dalam persamaan gerak. Nonlinieritas inilah yang secara klasik menunjukkan bahwa medan dapat berinteraksi dengan dirinya sendiri. Dalam teori medan kuantum, suku seperti φ^4 menghasilkan vertex interaksi dalam diagram Feynman.

4.8 On-shell dan off-shell

Dua istilah akan sering muncul dalam teori medan: on-shell dan off-shell.

Sebuah konfigurasi medan disebut on-shell jika memenuhi persamaan gerak klasik. Sebaliknya, konfigurasi disebut off-shell jika tidak harus memenuhi persamaan gerak.

Contoh: untuk medan skalar bebas,

$$(\Box + m^2)\phi = 0.$$

Jika sebuah fungsi $\varphi(x)$ memenuhi persamaan ini, ia on-shell. Jika tidak, ia off-shell.

Mengapa istilah ini penting? Karena dalam prinsip aksi, kita memvariasikan medan melalui konfigurasi-konfigurasi yang pada umumnya off-shell. Persamaan gerak muncul sebagai syarat agar aksi stasioner. Dalam formulasi integral lintasan nanti, kontribusi medan off-shell juga muncul dalam penjumlahan atas sejarah medan, meskipun dengan bobot fase kuantum. Karena itu, membedakan on-shell dan off-shell membantu kita memahami hubungan antara teori klasik, teori kuantum, dan perhitungan diagram Feynman (Srednicki, 2007).

4.9 Momentum kanonik dan Hamiltonian medan

Walaupun formulasi Lagrangian sangat alami secara relativistik, formulasi Hamiltonian juga penting, terutama untuk kuantisasi kanonik di Bab 6.

Dalam mekanika partikel, momentum kanonik didefinisikan sebagai

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

Untuk medan, analog momentumnya adalah rapat momentum kanonik:

$$\boxed{\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)}.}$$

Untuk medan skalar real dengan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 - V(\phi),$$

kita memperoleh

$$\pi = \partial_t \phi.$$

Hamiltonian density didefinisikan sebagai

$$\mathcal{H} = \pi \, \partial_t \phi - \mathcal{L}.$$

Untuk contoh medan skalar,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + V(\phi).$$

Hamiltonian total adalah

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H}.$$

Jika $V(\varphi) \geq 0$, bentuk ini menunjukkan bahwa energi medan skalar bebas bernilai positif. Secara fisik, energi tersimpan dalam perubahan waktu medan, variasi spasial medan, dan potensial lokal.

Contoh konkretnya: jika medan φ seragam di ruang tetapi berubah terhadap waktu, maka $|\nabla\varphi|^2=0$, sehingga energi berasal dari $\pi^2/2$ dan $V(\varphi)$. Jika medan tidak berubah terhadap waktu tetapi bervariasi di ruang, maka $\pi=0$, dan energi berasal dari gradien $|\nabla\varphi|^2/2$ serta potensial.

4.10 Arus terkonservasi

Sekarang kita masuk ke salah satu gagasan paling kuat dalam fisika teoretis: hubungan antara simetri dan kekekalan.

Sebelum teorema Noether, kita perlu mendefinisikan apa itu arus terkonservasi.

Dalam relativitas, arus biasanya ditulis sebagai empat-vektor

$$j^\mu = (j^0, \mathbf{j}).$$

Komponen j^0 sering ditafsirkan sebagai rapat muatan, sedangkan $\mathbf{j}$ adalah arus ruang. Arus disebut terkonservasi jika memenuhi persamaan kontinuitas relativistik

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0.}$$

Dalam komponen ruang dan waktu,

$$\partial_t j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Persamaan ini mengatakan bahwa muatan tidak hilang begitu saja. Jika rapat muatan dalam suatu daerah berkurang, maka muatan harus mengalir keluar melalui batas daerah tersebut.

Muatan total didefinisikan sebagai

$$Q(t) = \int d^3x \, j^0(\mathbf{x}, t).$$

Turunan waktunya adalah

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \, \partial_t j^0 = -\int d^3x \, \nabla \cdot \mathbf{j}.$$

Dengan teorema divergensi,

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}.$$

Jika kita mengintegralkan atas seluruh ruang dan arus cukup cepat hilang di tak hingga, maka fluks permukaan nol. Akibatnya,

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = 0.}$$

Jadi Q adalah besaran terkonservasi.

Contoh sederhana: dalam elektrodinamika klasik, konservasi muatan listrik ditulis sebagai

$$\partial_\mu j^\mu_{\text{em}} = 0.$$

Dalam teori medan kuantum, struktur serupa akan muncul untuk muatan global, muatan gauge, bilangan lepton, bilangan baryon dalam batas tertentu, dan banyak besaran lain.

4.11 Simetri: perubahan yang tidak mengubah fisika

Secara intuitif, simetri adalah transformasi yang mengubah deskripsi suatu sistem tetapi tidak mengubah isi fisiknya. Contoh paling sederhana adalah translasi ruang. Jika sebuah eksperimen dilakukan hari ini di meja laboratorium, lalu seluruh eksperimen digeser satu meter ke kanan tanpa mengubah kondisi lain, hukum fisika yang sama harus berlaku. Ini adalah simetri translasi ruang.

Dalam teori medan, simetri biasanya berupa perubahan pada koordinat, medan, atau keduanya, yang membuat aksi tetap sama. Jika aksi tidak berubah, persamaan gerak yang dihasilkan juga konsisten dengan transformasi tersebut.

Ada dua jenis simetri yang perlu dibedakan sejak awal.

Pertama, simetri global. Dalam simetri global, parameter transformasi sama di semua titik ruang-waktu. Contoh: medan kompleks

$$\psi(x)$$

diubah menjadi

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x),$$

dengan α konstan. Semua titik ruang-waktu mengalami rotasi fase yang sama.

Kedua, simetri lokal atau simetri gauge. Dalam simetri lokal, parameter transformasi boleh bergantung pada ruang-waktu:

$$\alpha \to \alpha(x).$$

Simetri gauge akan menjadi tema besar pada Bab 13 dan Bab 14. Untuk bab ini, kita fokus pada simetri global dan teorema Noether.

4.12 Teorema Noether: simetri menghasilkan kekekalan

Teorema Noether adalah salah satu hasil paling penting dalam fisika matematis. Secara ringkas, untuk setiap simetri kontinu dari aksi, terdapat arus terkonservasi yang bersesuaian. Hasil ini diperkenalkan oleh Emmy Noether dalam makalah tahun 1918 dan menjadi fondasi modern hubungan antara simetri dan hukum kekekalan (Noether, 1918).

Mari kita pahami istilahnya.

Simetri kontinu adalah simetri yang dapat dilakukan sedikit demi sedikit. Rotasi dengan sudut α adalah kontinu karena kita dapat memilih α sekecil apa pun. Translasi waktu $t \to t+a$ juga kontinu karena a dapat dibuat sangat kecil. Sebaliknya, transformasi cermin ruang tertentu adalah diskret karena tidak dapat dihubungkan ke identitas melalui perubahan parameter kecil.

Misalkan kita punya beberapa medan φ_a, dan transformasi infinitesimalnya adalah

$$\phi_a \to \phi_a + \delta\phi_a,$$

dengan

$$\delta\phi_a = \epsilon\,\Delta\phi_a.$$

Di sini ε adalah parameter kecil konstan, sedangkan $\Delta\varphi_a$ adalah bentuk perubahan medan per satuan parameter.

Jika perubahan Lagrangian density hanya berupa turunan total,

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon\,\partial_\mu K^\mu,$$

maka aksi berubah hanya oleh suku batas. Dengan kondisi batas yang sesuai, aksi tetap sama. Dalam kasus ini, teorema Noether memberi arus

$$\boxed{j^\mu = \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\Delta\phi_a - K^\mu.}$$

Jika medan memenuhi persamaan gerak, maka

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0.}$$

Kalimat “jika medan memenuhi persamaan gerak” penting. Konservasi arus Noether biasanya berlaku on-shell. Artinya, hukum kekekalan muncul untuk evolusi fisik yang benar, bukan untuk sembarang konfigurasi medan off-shell.

4.13 Contoh Noether 1: simetri translasi dan energi-momentum

Salah satu contoh paling penting adalah translasi ruang-waktu. Jika hukum fisika tidak bergantung secara eksplisit pada posisi dan waktu, maka aksi invarian terhadap

$$x^\mu \to x^\mu + a^\mu,$$

dengan a^μ konstan.

Konsekuensi Noether dari translasi ruang-waktu adalah konservasi energi dan momentum. Dalam teori medan, arus Noether yang bersesuaian dikemas dalam tensor energi-momentum kanonik

$$\boxed{T^\mu{}_\nu = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}.}$$

Jika Lagrangian density tidak bergantung eksplisit pada x^nu, maka

$$\boxed{\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0.}$$

Untuk nu=0, hukum ini berkaitan dengan konservasi energi. Untuk nu=i, ia berkaitan dengan konservasi momentum ruang.

Mari lihat pada medan skalar real. Kita punya

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi.$$

Maka

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \partial^{\mu}\phi\,\partial_{\nu}\phi - \delta^{\mu}{}_{\nu}\mathcal{L}.$$

Komponen

$$T^{0}{}_{0}$$

adalah rapat energi. Karena $\partial^0\varphi=\partial_t\varphi$, kita memperoleh

$$T^{0}{}_{0} = (\partial_t\phi)^2 - \mathcal{L}.$$

Dengan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - V(\phi),$$

maka

$$T^{0}{}_{0} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + V(\phi).$$

Ini sama dengan Hamiltonian density ▯. Jadi energi total

$$E = \int d^3x\, T^{0}{}_{0}$$

terkonservasi jika tidak ada ketergantungan eksplisit terhadap waktu dan kondisi batas sesuai.

Contoh fisiknya sederhana: jika medan skalar bebas berevolusi di ruang kosong tanpa sumber eksternal yang berubah terhadap waktu, energi totalnya tetap. Energi dapat berpindah dari satu daerah ke daerah lain melalui arus energi, tetapi jumlah totalnya konstan.

4.14 Contoh Noether 2: simetri fase medan kompleks

Sekarang kita lihat contoh yang sangat penting untuk fisika partikel: simetri fase global.

Ambil medan kompleks ψ(x). Medan kompleks dapat dipandang sebagai dua medan real, karena

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2).$$

Lagrangian density sederhana untuk medan kompleks bebas adalah

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \, \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi.$$

Lagrangian ini invarian terhadap transformasi fase global

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \qquad \psi^* \to e^{-i\alpha}\psi^*,$$

dengan α konstan.

Untuk transformasi infinitesimal, karena

$$e^{i\alpha} \approx 1 + i\alpha,$$

kita punya

$$\delta\psi = i\alpha\psi, \qquad \delta\psi^* = -i\alpha\psi^*.$$

Maka

$$\Delta\psi = i\psi, \qquad \Delta\psi^* = -i\psi^*.$$

Karena δ□=0, kita dapat mengambil K^μ=0. Arus Noethernya adalah

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\Delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}\Delta\psi^*.$$

Kita hitung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \partial^\mu \psi^*,$$

dan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} = \partial^\mu \psi.$$

Jadi

$$j^\mu = (\partial^\mu \psi^*)(i\psi) + (\partial^\mu \psi)(-i\psi^*).$$

Atau

$$\boxed{j^\mu = i\left(\psi\, \partial^\mu \psi^* - \psi^*\, \partial^\mu \psi\right).}$$

Sebagian buku memakai tanda kebalikan karena memilih konvensi transformasi fase yang berbeda. Yang penting adalah konsistensi: arusnya terkonservasi,

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

ketika persamaan gerak dipenuhi.

Muatan Noethernya adalah

$$Q = \int d^3x\, j^0.$$

Dalam teori medan kuantum, muatan seperti ini sering berkaitan dengan jumlah partikel dikurangi antipartikel. Ini adalah salah satu alasan simetri fase global menjadi penting dalam teori partikel.

4.15 Contoh Noether 3: simetri pergeseran medan massless

Contoh lain yang sangat sederhana adalah medan skalar real tanpa potensial:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi.$$

Lagrangian ini tidak

Document information

Bab 4: Medan Klasik dan Prinsip Aksi

Project	Teori Medan Kuantum
Document	Document 1.8
Author	Isti_26
Verifier	Not verified
Downloaded	July 04, 2026 21:57 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/teori-medan-kuantum/documents/bab-4-medan--klasik-dan-prinsip-aksi/