Bab 3: Mekanika Kuantum yang Dibutuhkan

Pada Bab 2 kita membangun panggung relativistik: ruang-waktu Minkowski, empat-vektor, transformasi Lorentz, dan kausalitas. Sekarang kita kembali ke sisi kuantumnya. Tujuan bab ini bukan mengulang seluruh mekanika kuantum, melainkan menyiapkan bahasa minimum yang akan dipakai ketika kita mengkuantisasi medan.

Dalam teori medan kuantum, kita tidak lagi hanya mengkuantisasi posisi sebuah partikel. Kita akan mengkuantisasi medan. Namun alat matematis yang dipakai tetap berakar pada mekanika kuantum biasa: keadaan sebagai vektor, observabel sebagai operator, amplitudo probabilitas sebagai hasil kali dalam, dan osilator harmonik sebagai contoh paling penting dari sistem kuantum dengan operator penciptaan dan pemusnahan. Formulasi ruang Hilbert, operator Hermitian, dan aturan probabilitas Born adalah bagian dari struktur standar mekanika kuantum modern (Dirac, 1958; Sakurai & Napolitano, 2020; Shankar, 1994).

Kita akan memakai hbar secara eksplisit di bab ini. Di banyak bagian teori medan kuantum, terutama dalam fisika partikel, orang sering memilih satuan alami

$$\hbar = c = 1,$$

tetapi untuk sementara hbar tetap kita tampilkan agar struktur kuantumnya terlihat jelas.

3.1 Keadaan kuantum sebagai vektor

Dalam mekanika klasik, keadaan sebuah partikel pada satu waktu biasanya diberikan oleh posisi dan momentumnya:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

Jika kita tahu posisi dan momentum awal secara tepat, hukum Newton memberi cara menentukan gerak berikutnya, setidaknya secara prinsip.

Dalam mekanika kuantum, keadaan tidak dinyatakan oleh satu titik di ruang fase klasik. Keadaan dinyatakan oleh sebuah objek matematis yang disebut vektor keadaan, biasanya ditulis

$$|\psi\rangle.$$

Notasi ini disebut notasi Dirac atau bra-ket notation, diperkenalkan dan dipopulerkan oleh Dirac dalam formulasi mekanika kuantum abstrak (Dirac, 1958). Tanda $|\psi\rangle$ dibaca “ket psi”.

Secara intuitif, $|\psi\rangle$ memuat semua informasi yang dapat digunakan teori untuk memprediksi hasil pengukuran. Ia bukan posisi, bukan momentum, dan bukan lintasan. Ia adalah keadaan kuantum.

Ruang tempat vektor-vektor keadaan ini hidup disebut ruang Hilbert. Untuk kebutuhan kita, ruang Hilbert dapat dipahami sebagai ruang vektor kompleks yang dilengkapi dengan konsep panjang dan sudut melalui hasil kali dalam. Kata “kompleks” berarti koefisiennya dapat berupa bilangan kompleks, misalnya $a+ib$, dengan $i^2=-1$.

Mengapa bilangan kompleks muncul? Karena prediksi kuantum dibangun dari amplitudo probabilitas, dan amplitudo ini dapat saling memperkuat atau saling meniadakan melalui interferensi. Probabilitas diperoleh dari kuadrat magnitudo amplitudo, bukan dari amplitudo itu sendiri. Struktur ini merupakan inti aturan Born dalam mekanika kuantum (Sakurai & Napolitano, 2020).

Jika $|\psi\rangle$ adalah keadaan, maka objek dualnya ditulis

$$\langle\psi|,$$

dan disebut “bra psi”. Hasil kali dalam antara dua keadaan $|\varphi\rangle$ dan $|\psi\rangle$ ditulis

$$\langle\phi|\psi\rangle.$$

Nilai ini adalah bilangan kompleks. Jika $\langle\varphi|\psi\rangle=0$, kedua keadaan disebut ortogonal. Secara fisik, keadaan ortogonal dapat dibedakan secara sempurna oleh suatu pengukuran ideal.

Panjang kuadrat keadaan $|\psi\rangle$ adalah

$$\langle\psi|\psi\rangle.$$

Untuk keadaan fisik yang telah dinormalisasi, kita memilih

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

Normalisasi ini berarti total probabilitas semua kemungkinan hasil pengukuran adalah satu.

3.2 Superposisi dan amplitudo probabilitas

Salah satu prinsip paling penting dalam mekanika kuantum adalah superposisi. Jika $|\psi_1\rangle$ dan $|\psi_2\rangle$ adalah dua keadaan yang mungkin, maka kombinasi linear

$$|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle$$

juga merupakan keadaan yang mungkin, dengan a dan b bilangan kompleks.

Contoh sederhana adalah spin elektron. Untuk spin sepanjang sumbu z, kita dapat memakai dua keadaan basis:

$$|\uparrow\rangle, \qquad |\downarrow\rangle.$$

Keadaan umum spin-frac12 dapat ditulis

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle.$$

Jika keadaan ternormalisasi, maka

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Menurut aturan Born, probabilitas menemukan spin “naik” adalah $|a|^2$, sedangkan probabilitas menemukan spin “turun” adalah $|b|^2$. Yang penting, a dan b sendiri bukan probabilitas. Mereka adalah amplitudo. Fase relatif antara a dan b dapat memengaruhi hasil pengukuran pada basis lain.

Misalnya, keadaan

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \right)$$

dan

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \right)$$

memberikan probabilitas yang sama jika kita mengukur spin sepanjang sumbu z: masing-masing memberi peluang 1/2 untuk naik dan 1/2 untuk turun. Tetapi keduanya bukan keadaan yang sama. Tanda relatif di antara dua komponen membawa informasi fisik. Jika kita mengukur spin sepanjang sumbu x, kedua keadaan ini memberi hasil berbeda.

Inilah salah satu pelajaran kuantum yang akan terus muncul dalam QFT: amplitudo dijumlahkan, probabilitas diperoleh setelah mengambil kuadrat magnitudo. Dalam perhitungan hamburan, setiap diagram Feynman memberi kontribusi amplitudo, dan amplitudo-amplitudo itu dijumlahkan sebelum dihitung probabilitasnya.

3.3 Basis, komponen, dan makna representasi

Dalam ruang vektor biasa, kita dapat menulis sebuah vektor sebagai kombinasi basis. Misalnya di ruang tiga dimensi,

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}.$$

Hal yang sama berlaku dalam ruang Hilbert. Jika \|n⟩\ adalah basis ortonormal diskrit, maka keadaan umum dapat ditulis

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle.$$

Koefisien

$$c_n = \langle n|\psi\rangle$$

adalah amplitudo untuk menemukan sistem dalam keadaan basis $|n\rangle$. Jika keadaan ternormalisasi, maka

$$\sum_n |c_n|^2 = 1.$$

Basis disebut ortonormal jika memenuhi

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn},$$

dengan δ_{mn} adalah delta Kronecker:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Basis lengkap juga memenuhi relasi identitas

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbf{1}.$$

Persamaan ini berarti bahwa setiap keadaan dapat dibangun dari basis tersebut.

Untuk variabel kontinu, seperti posisi, penjumlahan diganti integral. Keadaan posisi ditulis $|x\rangle$, dan memenuhi normalisasi kontinu

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'),$$

dengan $\delta(x-x')$ adalah delta Dirac. Delta Dirac bukan fungsi biasa dalam arti elementer, melainkan distribusi yang didefinisikan melalui sifat

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x') f(x) = f(x').$$

Relasi kelengkapan basis posisi adalah

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|x\rangle\langle x| = \mathbf{1}.$$

Jika kita menyisipkan identitas ini ke keadaan |ψ⟩, kita memperoleh

$$|\psi\rangle = \int dx\,|x\rangle\langle x|\psi\rangle.$$

Besaran

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$

disebut fungsi gelombang dalam representasi posisi. Ia adalah amplitudo probabilitas untuk menemukan partikel di sekitar posisi x. Probabilitas menemukan partikel dalam interval kecil [x,x+dx] adalah

$$|\psi(x)|^2 dx.$$

Di tiga dimensi, fungsi gelombang ditulis ψ(x), dan normalisasi menjadi

$$\int d^3x\,|\psi(\mathbf{x})|^2 = 1.$$

Representasi hanyalah cara menuliskan keadaan yang sama. Keadaan abstrak |ψ⟩ adalah objek fisiknya; ψ(x) adalah komponen keadaan tersebut dalam basis posisi.

3.4 Operator dan observabel

Dalam mekanika kuantum, besaran fisik yang dapat diukur—seperti posisi, momentum, energi, dan momentum sudut—diwakili oleh operator. Operator adalah aturan linear yang mengubah satu vektor keadaan menjadi vektor keadaan lain:

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle.$$

Tanda topi pada hatA mengingatkan bahwa A adalah operator, bukan bilangan biasa.

Operator yang mewakili observabel harus memiliki nilai eigen real. Dalam formulasi standar, observabel diwakili oleh operator Hermitian atau, lebih tepat secara matematis untuk ruang berdimensi tak hingga, operator self-adjoint (Sakurai & Napolitano, 2020; Shankar, 1994). Untuk tujuan fisika kita, syarat Hermitian dapat ditulis sebagai

$$\langle \phi | \hat{A} \psi \rangle = \langle \hat{A} \phi | \psi \rangle$$

untuk keadaan-keadaan yang berada dalam domain operator tersebut.

Persamaan eigen operator hatA adalah

$$\hat{A} |a\rangle = a |a\rangle.$$

Di sini a adalah nilai eigen, dan $|a\rangle$ adalah keadaan eigen. Jika sistem berada dalam keadaan eigen $|a\rangle$, maka pengukuran observabel A menghasilkan nilai a dengan probabilitas satu.

Contoh paling sederhana adalah Hamiltonian hatH, yaitu operator energi. Jika

$$\hat{H} |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle,$$

maka $|E_n\rangle$ adalah keadaan dengan energi pasti E_n.

Jika keadaan umum ditulis dalam basis energi,

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle,$$

maka probabilitas mengukur energi E_n adalah

$$|c_n|^2.$$

Nilai rata-rata atau nilai harap observabel A pada keadaan ternormalisasi $|\psi\rangle$ adalah

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

Contoh: jika sebuah sistem berada dalam superposisi dua keadaan energi,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |E_2\rangle,$$

maka peluang mengukur E_1 adalah 1/3, peluang mengukur E_2 adalah 2/3, dan nilai harap energinya

$$\langle H \rangle = \frac{1}{3} E_1 + \frac{2}{3} E_2.$$

Nilai harap bukan berarti setiap pengukuran menghasilkan nilai itu. Ia adalah rata-rata hasil jika percobaan yang sama diulang berkali-kali pada keadaan yang disiapkan identik.

3.5 Komutator: ketika urutan operasi penting

Dalam aljabar bilangan biasa, urutan perkalian tidak penting:

$$ab = ba.$$

Tetapi operator tidak selalu demikian. Untuk dua operator hatA dan hatB, kita definisikan komutator

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

Jika

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0,$$

maka kedua operator dikatakan komutatif. Jika tidak nol, urutan operasi penting.

Dalam mekanika kuantum, komutator bukan sekadar detail matematis. Ia menyatakan struktur fisik. Relasi komutasi paling dasar adalah

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Relasi ini adalah bentuk kuantum dari hubungan kanonik antara posisi dan momentum. Ia menjadi model bagi kuantisasi medan: kelak medan hatφ(x) dan momentum kanoniknya hatπ(x) akan memenuhi relasi komutasi yang menyerupai relasi hatx dan hatp, tetapi dengan delta Dirac karena ada satu derajat kebebasan di setiap titik ruang.

Contoh konkret: dalam representasi posisi satu dimensi, operator posisi bertindak sebagai perkalian,

$$(\hat{x}\psi)(x) = x\psi(x),$$

sedangkan operator momentum bertindak sebagai turunan,

$$(\hat{p}\psi)(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x).$$

Mari hitung komutatornya pada fungsi gelombang ψ(x):

$$(\hat{x}\hat{p}\psi)(x) = x\left(-i\hbar\frac{d\psi}{dx}\right),$$

sedangkan

$$(\hat{p}\hat{x}\psi)(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}(x\psi) = -i\hbar\left(\psi + x\frac{d\psi}{dx}\right).$$

Maka

$$((\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\psi)(x) = i\hbar\psi(x).$$

Karena berlaku untuk ψ(x) yang sesuai, kita tulis

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Relasi sederhana ini adalah salah satu benih utama seluruh teori kuantum.

3.6 Evolusi waktu dan persamaan Schrödinger

Keadaan kuantum berubah terhadap waktu. Dalam gambar Schrödinger, operator observabel biasanya dianggap tetap, sedangkan keadaan berubah menurut persamaan Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle.$$

Hamiltonian hatH adalah operator yang menghasilkan translasi waktu. Jika Hamiltonian tidak bergantung eksplisit pada waktu, solusi formalnya adalah

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi(0)\rangle.$$

Operator

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

disebut operator evolusi waktu. Ia bersifat uniter, yaitu

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbf{1}.$$

Sifat uniter menjamin bahwa normalisasi keadaan tetap terjaga:

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle.$$

Secara fisik, ini berarti total probabilitas tetap satu.

Jika keadaan awal adalah keadaan eigen energi,

$$\hat{H} |E\rangle = E |E\rangle,$$

maka evolusinya sederhana:

$$|E, t\rangle = e^{-iEt/\hbar}|E\rangle.$$

Faktor fase global e^(-iEt/hbar) tidak mengubah probabilitas hasil pengukuran pada keadaan energi tunggal. Namun pada superposisi beberapa energi, fase relatif berubah terhadap waktu dan dapat menghasilkan efek interferensi.

Misalnya,

$$|\psi(0)\rangle = c_1|E_1\rangle + c_2|E_2\rangle.$$

Maka

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar}|E_1\rangle + c_2 e^{-iE_2 t/\hbar}|E_2\rangle.$$

Fase relatif antara dua komponen berubah dengan frekuensi

$$\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}.$$

Gagasan bahwa energi berhubungan dengan frekuensi fase akan muncul kembali ketika kita membahas solusi gelombang relativistik dan propagator.

3.7 Representasi momentum

Selain basis posisi |x⟩, kita dapat memakai basis momentum |p⟩. Keadaan momentum memenuhi

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle.$$

Dalam satu dimensi, normalisasi kontinu biasanya dipilih sebagai

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p'),$$

dan kelengkapannya

$$\int dp\,|p\rangle\langle p| = \mathbf{1}.$$

Fungsi gelombang dalam representasi momentum adalah

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle.$$

Hubungan antara representasi posisi dan momentum diberikan oleh transformasi Fourier. Dengan konvensi normalisasi yang umum dipakai dalam mekanika kuantum,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ipx/\hbar} \tilde{\psi}(p),$$

dan

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar} \psi(x).$$

Fungsi

$$e^{ipx/\hbar}$$

adalah gelombang bidang. Ia memiliki momentum pasti p, karena

$$-i\hbar \frac{d}{dx} e^{ipx/\hbar} = p e^{ipx/\hbar}.$$

Jadi momentum pasti berhubungan dengan osilasi ruang yang teratur. Panjang gelombangnya memenuhi

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

Dengan h=2πhbar, ini menjadi hubungan de Broglie

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

Di tiga dimensi, rumusnya menjadi

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \tilde{\psi}(\mathbf{p}),$$

dan

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \psi(\mathbf{x}).$$

Dalam teori medan kuantum, representasi momentum sangat penting karena hamburan partikel biasanya dinyatakan dalam energi dan momentum awal serta akhir. Diagram Feynman juga lebih sering dihitung di ruang momentum daripada ruang posisi.

3.8 Operator posisi dan momentum dalam dua representasi

Satu keadaan fisik dapat ditulis dalam berbagai representasi. Operator yang sama juga memiliki bentuk berbeda tergantung representasinya.

Dalam representasi posisi:

$$\hat{x} = x, \qquad \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}.$$

Dalam representasi momentum:

$$\hat{p} = p, \qquad \hat{x} = i\hbar \frac{d}{dp}.$$

Kedua deskripsi ini setara. Mereka hanya memakai basis berbeda.

Contoh: partikel bebas satu dimensi memiliki Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}.$$

Dalam representasi posisi,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}.$$

Persamaan Schrödinger tak bergantung waktu menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi.$$

Solusinya berupa gelombang bidang

$$\psi(x) \propto e^{ipx/\hbar},$$

dengan

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Dalam representasi momentum, Hamiltonian partikel bebas jauh lebih sederhana:

$$(\hat{H}\tilde{\psi})(p) = \frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p).$$

Artinya, basis momentum adalah basis energi untuk partikel bebas nonrelativistik. Dalam QFT, keadaan asimtotik jauh sebelum dan jauh sesudah tumbukan biasanya diperlakukan sebagai partikel bebas dengan momentum tertentu. Karena itu basis momentum menjadi bahasa alami untuk teori hamburan.

3.9 Osilator harmonik kuantum: model kecil bagi medan kuantum

Sekarang kita tiba pada sistem yang sangat penting: osilator harmonik kuantum. Secara klasik, osilator harmonik adalah sistem yang mengalami gaya pemulih sebanding dengan simpangan. Contohnya massa pada pegas ideal. Hamiltonian klasiknya

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2,$$

dengan m massa dan ω frekuensi sudut.

Dalam mekanika kuantum, x dan p menjadi operator:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2,$$

dengan

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Osilator harmonik kuantum dapat diselesaikan dengan metode operator penciptaan dan pemusnahan. Metode ini adalah salah satu jembatan langsung menuju QFT, karena medan bebas dapat dipahami sebagai kumpulan tak hingga osilator harmonik, satu untuk setiap mode momentum, dalam formulasi kanonik standar (Peskin & Schroeder, 1995; Schwartz, 2014).

Kita definisikan operator

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p},$$

dan

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}.$$

Operator hata disebut operator pemusnahan, sedangkan hata^† disebut operator penciptaan. Untuk saat ini nama ini mungkin terdengar terlalu dramatis. Dalam osilator biasa, hata^† menaikkan tingkat energi satu langkah, sedangkan hata menurunkannya satu langkah. Dalam QFT, interpretasi ini menjadi lebih literal: operator penciptaan menciptakan satu kuanta medan, yaitu satu partikel.

Dari relasi [hatx,hatp]=ihbar, dapat ditunjukkan bahwa

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.$$

Hamiltonian osilator dapat ditulis ulang sebagai

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right).$$

Definisikan operator bilangan

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}.$$

Keadaan eigen hatN ditulis |n⟩, dengan

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle.$$

Nilai n adalah bilangan bulat tak negatif:

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Energi keadaan |n⟩ adalah

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Jadi energi osilator harmonik kuantum diskrit, terpisah oleh jarak tetap hbarω. Keadaan energi terendah adalah

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

Energi ini disebut energi titik nol. Ia tidak nol, meskipun osilator berada pada keadaan dasar. Ini bukan karena osilator “bergerak klasik” dalam lintasan tertentu, melainkan karena keadaan dengan x=0 dan p=0 tepat sekaligus tidak diperbolehkan oleh struktur komutator kuantum.

Operator penciptaan dan pemusnahan bekerja sebagai

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle,$$

dan

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle.$$

Untuk n=0,

$$\hat{a}|0\rangle = 0.$$

Keadaan |0⟩ disebut keadaan vakum osilator atau keadaan dasar. Tidak ada keadaan dengan n=-1, sehingga operator pemusnahan membunuh keadaan dasar.

Struktur ini akan muncul hampir tanpa perubahan dalam kuantisasi medan skalar. Bedanya, indeks n tidak hanya menghitung tingkat energi satu osilator, melainkan jumlah partikel dalam mode tertentu. Keadaan vakum medan |0⟩ bukan “ketiadaan mutlak” dalam arti klasik, melainkan keadaan energi terendah dari sistem medan kuantum.

3.10 Mengapa osilator harmonik begitu sentral dalam QFT?

Ada alasan fisik dan matematis mengapa osilator harmonik menjadi tokoh utama.

Pertama, banyak sistem kecil di sekitar titik stabil terlihat seperti osilator harmonik. Jika sebuah potensial V(x) memiliki minimum di x=0, maka untuk simpangan kecil kita dapat mengekspansi

$$V(x) = V(0) + \frac{1}{2}V''(0)x^2 + \cdots ,$$

dengan asumsi V'(0)=0. Suku kuadratik memberi osilator harmonik. Karena itu osilator harmonik adalah aproksimasi universal untuk fluktuasi kecil di sekitar keadaan stabil.

Kedua, teori medan bebas secara matematis menjadi kumpulan mode Fourier. Setiap mode berperilaku seperti osilator harmonik. Untuk medan skalar bebas, mode momentum k memiliki frekuensi

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

dalam satuan c=hbar=1. Setelah dikuantisasi, setiap mode memiliki operator $hata_k$ dan $hata_k$^†. Operator $hata_k$^† menciptakan satu partikel bermomentum k, sedangkan $hata_k$ memusnahkannya. Inilah salah satu cara paling konkret memahami kalimat “partikel adalah eksitasi medan” dalam teori medan kuantum (Peskin & Schroeder, 1995; Schwartz, 2014).

Ketiga, teori perturbasi berangkat dari sistem bebas yang dapat diselesaikan tepat, lalu menambahkan interaksi sebagai koreksi. Karena sistem bebas dalam QFT adalah kumpulan osilator, kemampuan memahami osilator harmonik bukan sekadar latihan mekanika kuantum; ia adalah fondasi teknis untuk diagram Feynman, propagator, dan ruang Fock.

3.11 Prinsip ketidakpastian

Sekarang kita kembali ke konsekuensi relasi komutator. Untuk observabel hatA, definisikan deviasi dari nilai rata-rata:

$$\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle A\rangle.$$

Ketidakpastian atau simpangan baku observabel A pada keadaan |ψ⟩ adalah

$$(\Delta A)^2 = \langle(\hat{A} - \langle A\rangle)^2\rangle.$$

Jadi Δ A mengukur seberapa tersebar hasil pengukuran A jika keadaan yang sama disiapkan dan diukur berkali-kali.

Untuk dua observabel hatA dan hatB, berlaku ketaksamaan Robertson

$$\Delta A \, \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| .$$

Untuk posisi dan momentum,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

sehingga

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Ini adalah bentuk terkenal prinsip ketidakpastian Heisenberg. Secara historis, prinsip ketidakpastian diperkenalkan oleh Heisenberg sebagai salah satu tanda mendalam bahwa konsep klasik mengenai posisi dan momentum yang sekaligus pasti tidak dapat dipertahankan dalam mekanika kuantum (Heisenberg, 1927).

Penting untuk memahami prinsip ini dengan benar. Ketidakpastian bukan sekadar keterbatasan alat ukur yang kurang halus. Ia berasal dari struktur keadaan kuantum dan relasi komutasi operator. Jika keadaan sangat terlokalisasi di posisi, maka fungsi gelombangnya membutuhkan banyak komponen momentum Fourier. Akibatnya momentum menjadi tersebar. Sebaliknya, keadaan momentum pasti berupa gelombang bidang yang menyebar di seluruh ruang, sehingga posisinya sangat tidak pasti.

Contoh: gelombang bidang

$$\psi(x) \propto e^{ipx/\hbar}$$

memiliki momentum pasti p. Namun $|\psi(x)|^2$ konstan di seluruh ruang, sehingga posisi partikel tidak terlokalisasi. Di sisi lain, paket gelombang yang sempit di sekitar suatu x_0 harus dibentuk dari superposisi banyak momentum.

Dalam QFT, prinsip ketidakpastian muncul dalam berbagai bentuk. Misalnya, fluktuasi vakum bukan berarti energi dapat “dipinjam” secara sembarangan, tetapi menunjukkan bahwa keadaan dasar medan kuantum memiliki korelasi dan fluktuasi yang tidak dapat dihilangkan begitu saja. Ketika kita membahas propagator, integral lintasan, dan renormalisasi, struktur ini akan muncul kembali dalam bentuk yang lebih kaya.

3.12 Gambar Schrödinger, Heisenberg, dan interaksi

Sebelum memasuki QFT, kita perlu mengenal tiga cara umum menggambarkan evolusi waktu.

Dalam gambar Schrödinger, keadaan bergantung pada waktu, operator biasanya tidak:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle.$$

Dalam gambar Heisenberg, keadaan dibuat tetap, sedangkan operator bergantung pada waktu:

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar}.$$

Turunan waktunya memenuhi

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}_H] + \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\right)_H.$$

Jika hatA tidak bergantung eksplisit pada waktu, maka

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}_H].$$

Persamaan ini mirip dengan persamaan Hamilton klasik yang memakai kurung Poisson. Hubungan antara komutator kuantum dan kurung Poisson klasik adalah salah satu jembatan antara mekanika klasik dan mekanika kuantum (Dirac, 1958; Shankar, 1994).

Dalam gambar interaksi, Hamiltonian dipisah menjadi bagian bebas dan interaksi:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}.$$

Evolusi sederhana akibat hatH$_0$ dimasukkan ke operator, sedangkan evolusi akibat hatH$_{\text{int}}$ dimasukkan ke keadaan. Gambar interaksi sangat penting dalam teori perturbasi dan perhitungan matriks-S. Ketika kita membahas diagram Feynman, kita akan memakai gagasan ini secara sistematis.

Intuisi fisiknya sederhana. Kita menyelesaikan bagian bebas terlebih dahulu, karena bagian itu dapat ditangani tepat. Lalu interaksi dihitung sebagai koreksi. Ini seperti mengatakan: “Saya tahu bagaimana partikel bebas bergerak. Sekarang saya hitung bagaimana peluangnya berubah ketika partikel saling berinteraksi.”

3.13 Dari satu partikel menuju ruang Fock

Mekanika kuantum biasa sering dimulai dari satu partikel. Keadaannya mungkin ψ(x) atau tildeψ(p). Tetapi dalam teori relativistik, jumlah partikel tidak harus tetap. Tumbukan dapat menciptakan pasangan partikel-antipartikel, dan partikel tidak stabil dapat meluruh menjadi beberapa partikel lain.

Karena itu QFT memakai ruang keadaan yang lebih besar, yaitu ruang Fock. Ruang Fock adalah ruang Hilbert yang mengandung sektor dengan jumlah partikel berbeda:

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \cdots .$$

Di sini:

- $\mathcal{H}_0$ adalah sektor nol partikel, yaitu vakum,
- $\mathcal{H}_1$ adalah sektor satu partikel,
- $\mathcal{H}_2$ adalah sektor dua partikel,
- dan seterusnya.

Simbol ⊕ berarti jumlah langsung: ruang total dibangun dari sektor-sektor yang berbeda.

Operator penciptaan memindahkan keadaan dari sektor n-partikel ke sektor n+1-partikel. Operator pemusnahan memindahkan keadaan dari sektor n-partikel ke sektor n-1-partikel.

Misalnya, jika $|0\rangle$ adalah vakum, maka keadaan satu partikel bermomentum p dapat ditulis secara skematis sebagai

$$|\mathbf{p}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle.$$

Keadaan dua partikel dapat ditulis

$$|\mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{q}}|0\rangle.$$

Untuk boson, operator penciptaan memenuhi relasi komutasi. Untuk fermion, seperti elektron, operatornya memenuhi relasi antikomutasi. Perbedaan ini akan menjadi pusat pembahasan pada Bab 11 dan Bab 12.

Di bab ini, yang perlu kita bawa adalah gagasan dasarnya: mekanika kuantum menyediakan struktur vektor keadaan dan operator; osilator harmonik menyediakan operator penciptaan dan pemusnahan; QFT memperluas struktur itu ke sistem dengan jumlah partikel yang dapat berubah.

3.14 Ringkasan bab

K

Document information

Bab 3: Mekanika Kuantum yang Dibutuhkan

Project	Teori Medan Kuantum
Document	Document 1.7
Author	Isti_26
Verifier	Not verified
Downloaded	July 06, 2026 02:36 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/teori-medan-kuantum/documents/bab-3-mekanika-kuantum-yang-dibutuhkan/