Bab 9: Komutator dan Prinsip Ketidakpastian

Pada bab sebelumnya kita telah memperlakukan besaran fisika sebagai operator. Posisi diwakili oleh operator hatx, momentum oleh hatp, energi oleh Hamiltonian hatH, dan besaran terukur lain oleh operator Hermitian. Kita juga telah melihat bahwa hasil pengukuran suatu observable berkaitan dengan eigenvalue operatornya.

Bab ini membahas satu pertanyaan yang tampak sederhana, tetapi sangat dalam:

> Apakah dua besaran fisika selalu dapat diketahui sekaligus dengan ketelitian tak terbatas?

Dalam fisika klasik, jawaban alaminya adalah “ya”. Sebuah partikel klasik dianggap memiliki posisi dan momentum tertentu pada saat yang sama. Kita mungkin tidak mengetahuinya karena alat ukur kita terbatas, tetapi dalam gambaran klasik nilai itu dianggap tetap ada.

Mekanika kuantum mengubah cara pandang ini. Untuk beberapa pasangan observable, keterbatasan mengetahui keduanya sekaligus bukan sekadar akibat alat ukur yang kurang baik. Keterbatasan itu muncul dari struktur matematis teori itu sendiri.

Struktur tersebut dinyatakan dengan komutator.

9.1 Mengapa urutan operasi bisa penting?

Sebelum masuk ke fisika, kita mulai dari ide matematika yang sangat sederhana: melakukan dua operasi dalam urutan berbeda tidak selalu menghasilkan jawaban yang sama.

Misalnya, ambil sebuah bilangan x=3. Lakukan dua operasi:

1. kalikan dengan 2;
2. tambah 1.

Jika kita kalikan dahulu lalu tambah,

$$3 \to 6 \to 7.$$

Jika kita tambah dahulu lalu kalikan,

$$3 \to 4 \to 8.$$

Hasilnya berbeda. Jadi, untuk dua operasi ini, urutan penting.

Dalam mekanika kuantum, operator juga merupakan operasi. Operator bekerja pada keadaan kuantum. Jika hatA dan hatB adalah dua operator, maka

$$hatAhatB\psi$$

berarti: pertama hatB bekerja pada ψ, kemudian hatA bekerja pada hasilnya. Sebaliknya,

$$hatBhatA\psi$$

berarti: pertama hatA bekerja pada ψ, kemudian hatB bekerja pada hasilnya.

Dalam notasi operator, operasi yang berada paling dekat dengan fungsi keadaan bekerja lebih dahulu.

Jika dua urutan itu selalu memberikan hasil yang sama untuk semua keadaan yang relevan, maka

$$hatAhatB=hatBhatA.$$

Jika tidak, urutannya penting. Perbedaan antara dua urutan inilah yang disebut komutator.

9.2 Definisi komutator

Untuk dua operator hatA dan hatB, komutatornya didefinisikan sebagai

$$[hatA,hatB] = hatAhatB-hatBhatA.$$

Simbol kurung siku [hatA,hatB] dibaca “komutator hatA dengan hatB”.

Jika

$$[hatA,hatB]=0,$$

kita mengatakan bahwa hatA dan hatB komutatif atau saling berkomutasi.

Jika

[hatA,hatB]≠ 0,

maka hatA dan hatB tidak berkomutasi.

Perhatikan bahwa komutator sendiri juga merupakan operator. Ia bukan sekadar bilangan, kecuali dalam kasus khusus.

Contoh sederhana dengan matriks

Ambil dua operator matriks

A= beginpmatrix 1 0 ; 0 -1 endpmatrix, B= beginpmatrix 0 1 ; 1 0 endpmatrix.

Hitung AB:

AB= beginpmatrix 1 0 ; 0 -1 endpmatrix beginpmatrix 0 1 ; 1 0 endpmatrix = beginpmatrix 0 1 ; -1 0 endpmatrix.

Sedangkan

BA= beginpmatrix 0 1 ; 1 0 endpmatrix beginpmatrix 1 0 ; 0 -1 endpmatrix = beginpmatrix 0 -1 ; 1 0 endpmatrix.

Maka

[A,B] = AB-BA = beginpmatrix 0 2 ; -2 0 endpmatrix.

Jadi A dan B tidak berkomutasi.

Contoh ini belum perlu diberi tafsir fisika. Tujuannya hanya memperlihatkan satu hal penting: dalam ruang keadaan kuantum, operator dapat memiliki aljabar yang tidak sama dengan perkalian bilangan biasa. Dalam bilangan biasa, ab=ba. Dalam operator, belum tentu.

9.3 Komutator posisi dan momentum

Sekarang kita masuk ke pasangan operator paling penting dalam mekanika kuantum: posisi dan momentum.

Dalam representasi posisi satu dimensi, operator posisi bekerja sebagai perkalian biasa:

hatxψ(x)=xψ(x).

Operator momentum bekerja sebagai turunan:

hatpψ(x)=-ihbar(dψ) □ (dx).

Bentuk operator momentum ini telah muncul dari hubungan gelombang materi de Broglie dan persamaan Schrödinger. Di sini kita akan melihat konsekuensinya.

Kita hitung komutator [hatx,hatp]. Biarkan operator itu bekerja pada fungsi gelombang ψ(x). Pertama,

hatxhatpψ = hatx≤ft(-ihbar(dψ) □ (dx)) = -ihbar x(dψ) □ (dx).

Kedua,

hatphatxψ = hatp(xψ) = -ihbar (d) □ (dx)(xψ).

Dengan aturan turunan hasil kali,

(d) □ (dx)(xψ) = ψ+x(dψ) □ (dx).

Jadi,

hatphatxψ = -ihbar≤ft(ψ+x(dψ) □ (dx)).

Sekarang ambil selisihnya:

[hatx,hatp]ψ = hatxhatpψ-hatphatxψ.

Substitusi hasil di atas:

[hatx,hatp]ψ = -ihbar x(dψ) □ (dx) - ≤ft[-ihbar≤ft(ψ+x(dψ) □ (dx))].

Maka

[hatx,hatp]ψ = -ihbar x(dψ) □ (dx) + ihbarψ + ihbar x(dψ) □ (dx).

Dua suku yang mengandung x dψ/dx saling meniadakan, sehingga

[hatx,hatp]ψ = ihbarψ.

Karena ini berlaku untuk fungsi gelombang yang sesuai, kita menulis

boxed[hatx,hatp]=ihbar.

Lebih tepatnya,

[hatx,hatp]=ihbar hatI,

dengan hatI operator identitas. Biasanya hatI tidak ditulis secara eksplisit.

Relasi ini disebut relasi komutasi kanonik. Ia adalah salah satu inti struktur mekanika kuantum nonrelativistik. Dalam tiga dimensi, relasinya menjadi

[hatx□,hatp□]=ihbarδ□□,

dengan δ_{ij} adalah delta Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Artinya, posisi x tidak berkomutasi dengan momentum p_x, tetapi posisi x berkomutasi dengan momentum $p_{(y)}$ dan $p_{(z)}$:

[hatx,hatp□]=ihbar, [hatx,hatp□y□]=0, [hatx,hatp□z□]=0.

Secara matematis, relasi komutasi posisi-momentum merupakan salah satu bentuk dasar formulasi operator mekanika kuantum modern; pembahasan standar dapat ditemukan dalam teks mekanika kuantum tingkat sarjana dan lanjut seperti Griffiths dan Schroeter serta Sakurai dan Napolitano (Griffiths & Schroeter, 2018; Sakurai & Napolitano, 2020).

9.4 Komutator dan kompatibilitas pengukuran

Sekarang kita hubungkan komutator dengan pengukuran.

Dalam mekanika kuantum, sebuah observable diwakili oleh operator Hermitian. Jika suatu keadaan adalah eigenstate dari operator hatA,

$$\hat{A}\psi = a\psi,$$

maka pengukuran hatA pada keadaan itu menghasilkan nilai pasti a.

Jika keadaan yang sama juga eigenstate dari hatB,

$$\hat{B}\psi = b\psi,$$

maka keadaan itu memiliki nilai pasti untuk hatA dan hatB sekaligus.

Pertanyaannya:

> Kapan dua observable dapat memiliki himpunan eigenstate bersama?

Untuk operator Hermitian dalam ruang berdimensi hingga, jika dua operator berkomutasi,

[hatA,hatB]=0,

maka keduanya dapat didiagonalkan secara simultan. Artinya, kita dapat memilih basis yang terdiri dari eigenstate bersama keduanya. Dalam ruang Hilbert berdimensi tak hingga, pernyataan ini memerlukan kehati-hatian teknis tambahan, terutama untuk operator tak terbatas seperti hatx dan hatp, tetapi ide fisiknya tetap sama dalam banyak kasus standar: operator yang berkomutasi berkaitan dengan observable yang kompatibel (Sakurai & Napolitano, 2020).

Dua observable disebut kompatibel jika keduanya dapat memiliki nilai pasti secara simultan pada keadaan yang sesuai.

Contoh operator yang kompatibel

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Keduanya diagonal dalam basis yang sama:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk e_1,

$$Ae_1 = 1e_1, \qquad Be_1 = 3e_1.$$

Untuk e_2,

$$Ae_2 = 2e_2, \qquad Be_2 = 5e_2.$$

Jadi e_1 dan e_2 adalah eigenstate bersama. Operator A dan B berkomutasi:

$$[A, B] = 0.$$

Jika sistem berada pada keadaan e_1, maka pengukuran A pasti memberi 1 dan pengukuran B pasti memberi 3. Tidak ada konflik antara keduanya.

Contoh operator yang tidak kompatibel

Ambil kembali

A= beginpmatrix 1 0 ; 0 -1 endpmatrix, B= beginpmatrix 0 1 ; 1 0 endpmatrix.

Kita telah menghitung bahwa

$$[A, B] \neq 0.$$

Operator A diagonal dalam basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tetapi e_1 bukan eigenvector B, sebab

$$Be_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2,$$

bukan kelipatan dari e_1. Jadi keadaan yang memberikan nilai pasti untuk A tidak otomatis memberikan nilai pasti untuk B.

Inilah pola umum: ketidakkomutatifan operator menunjukkan bahwa struktur nilai pasti dalam mekanika kuantum berbeda dari fisika klasik.

9.5 Nilai harapan dan simpangan baku

Untuk merumuskan prinsip ketidakpastian secara tepat, kita memerlukan ukuran “seberapa tersebar” hasil pengukuran suatu observable.

Misalkan hatA adalah observable dan sistem berada dalam keadaan ternormalisasi |ψ⟩. Nilai harapan hatA adalah

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

Nilai ini adalah rata-rata hasil pengukuran jika kita menyiapkan banyak sistem identik dalam keadaan yang sama dan mengukur hatA pada masing-masing sistem.

Tetapi rata-rata saja tidak cukup. Dua distribusi dapat memiliki rata-rata sama, tetapi sebaran berbeda. Karena itu kita memakai simpangan baku.

Untuk observable hatA, simpangan baku didefinisikan sebagai

$$\Delta A = \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle}.$$

Besaran Δ A mengukur ketidakpastian hasil pengukuran hatA pada keadaan tersebut.

Jika Δ A=0, maka pengukuran hatA tidak tersebar sama sekali: hasilnya pasti. Ini terjadi jika keadaan |ψ⟩ adalah eigenstate dari hatA.

Jika Δ A>0, maka hasil pengukuran hatA memiliki sebaran.

Contoh sederhana

Misalkan suatu observable memiliki kemungkinan hasil +1 dan -1, masing-masing dengan peluang 1/2. Nilai harapannya

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2}(+1) + \frac{1}{2}(-1) = 0.$$

Nilai harapan kuadratnya

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = 1.$$

Maka

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} = \sqrt{1 - 0} = 1.$$

Rata-ratanya nol, tetapi bukan berarti hasil pengukurannya selalu nol. Justru hasil nol tidak pernah muncul. Nilai nol hanya rata-rata dari banyak pengukuran.

Hal seperti ini penting dalam mekanika kuantum: nilai harapan tidak selalu merupakan salah satu hasil pengukuran tunggal.

9.6 Turunan prinsip ketidakpastian umum

Sekarang kita turunkan relasi ketidakpastian dari struktur ruang Hilbert. Turunan ini mengikuti gagasan matematis yang kemudian dirumuskan secara umum oleh Robertson pada tahun 1929 (Robertson, 1929).

Ambil dua observable Hermitian hatA dan hatB. Definisikan operator penyimpangan dari nilai rata-rata:

$$\delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle, \qquad \delta\hat{B} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle.$$

Dengan definisi ini,

$$\Delta A^2 = \langle(\delta\hat{A})^2\rangle, \qquad \Delta B^2 = \langle(\delta\hat{B})^2\rangle.$$

Sekarang bentuk dua vektor dalam ruang Hilbert:

$$|f\rangle = \delta\hat{A}|\psi\rangle, \qquad |g\rangle = \delta\hat{B}|\psi\rangle.$$

Menurut ketaksamaan Cauchy-Schwarz,

$$\langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2.$$

Tetapi

$$\langle f|f\rangle = \langle\psi|(\delta\hat{A})^2|\psi\rangle = \Delta A^2,$$

dan

$$\langle g|g\rangle = \Delta B^2.$$

Jadi

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq |\langle f|g\rangle|^2.$$

Selanjutnya,

$$\langle f|g\rangle = \langle\psi|\delta\hat{A}\delta\hat{B}|\psi\rangle = \langle\delta\hat{A}\delta\hat{B}\rangle.$$

Untuk setiap bilangan kompleks z,

$$|z|^2 \geq (\operatorname{Im} z)^2.$$

Ambil

$$z = \langle \delta\hat{A}\delta\hat{B} \rangle.$$

Bagian imajinernya berkaitan dengan komutator. Karena hatA dan hatB Hermitian,

$$\operatorname{Im}\langle \delta\hat{A}\delta\hat{B} \rangle = \frac{1}{2i}\left\langle [\delta\hat{A}, \delta\hat{B}] \right\rangle.$$

Tetapi konstanta ⟨ hatA⟩ dan ⟨ hatB⟩ berkomutasi dengan semua operator, sehingga

$$[\delta\hat{A}, \delta\hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}].$$

Maka

$$\operatorname{Im}\langle \delta\hat{A}\delta\hat{B} \rangle = \frac{1}{2i}\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle.$$

Dari sini kita memperoleh

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left| \frac{1}{2i}\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2.$$

Ambil akar kedua sisi:

$$\boxed{\Delta A\, \Delta B \geq \frac{1}{2}\left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|.}$$

Inilah bentuk umum relasi ketidakpastian Robertson.

Perhatikan maknanya: batas bawah hasil kali ketidakpastian dua observable ditentukan oleh nilai harapan komutatornya. Jika komutator besar, maka tidak mungkin kedua simpangan baku dibuat kecil sekaligus.

9.7 Prinsip ketidakpastian posisi-momentum

Sekarang kita terapkan hasil umum pada

$$\hat{A} = \hat{x}, \qquad \hat{B} = \hat{p}.$$

Kita telah memperoleh

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Maka

$$\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle = \langle i\hbar \rangle = i\hbar.$$

Jadi

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{1}{2} |i\hbar|.$$

Karena |ihbar|=hbar,

$$\boxed{\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.}$$

Inilah prinsip ketidakpastian Heisenberg untuk posisi dan momentum. Heisenberg memperkenalkan gagasan ketidakpastian dalam konteks kinematika dan mekanika kuantum pada tahun 1927, sedangkan bentuk matematis posisi-momentum yang ketat segera dikembangkan oleh Kennard pada tahun yang sama (Heisenberg, 1927; Kennard, 1927).

Relasi ini tidak mengatakan bahwa alat ukur kita buruk. Relasi ini mengatakan bahwa tidak ada keadaan kuantum normal yang memiliki Δ x=0 dan Δ p=0 sekaligus.

Jika Δ x dibuat sangat kecil, maka Δ p harus besar. Jika Δ p dibuat sangat kecil, maka Δ x harus besar.

9.8 Arti fisik ketidakpastian

Kata “ketidakpastian” mudah disalahpahami. Dalam kehidupan sehari-hari, ketidakpastian sering berarti kita tidak tahu sesuatu yang sebenarnya memiliki nilai pasti. Misalnya, kita tidak tahu posisi sebuah mobil karena belum melihatnya, tetapi mobil tetap berada di suatu tempat tertentu.

Dalam mekanika kuantum, situasinya lebih halus. Ketidakpastian Δx adalah sebaran hasil pengukuran posisi pada banyak sistem identik yang semuanya disiapkan dalam keadaan kuantum yang sama. Demikian juga Δp adalah sebaran hasil pengukuran momentum pada ensemble yang sama.

Jadi prinsip ketidakpastian tidak hanya berbicara tentang gangguan alat ukur. Ia berbicara tentang bentuk keadaan kuantum itu sendiri.

Keadaan dengan posisi tajam

Bayangkan fungsi gelombang yang sangat sempit di sekitar satu titik. Fungsi seperti ini memberikan peluang besar menemukan partikel di daerah kecil. Maka Δx kecil.

Tetapi fungsi yang sangat sempit memerlukan banyak komponen gelombang dengan panjang gelombang berbeda. Karena momentum berkaitan dengan panjang gelombang melalui

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

maka banyak panjang gelombang berarti banyak komponen momentum. Akibatnya Δp besar.

Keadaan dengan momentum tajam

Sebaliknya, momentum yang sangat tajam berkaitan dengan gelombang hampir monokromatik, misalnya

$$\psi(x) \sim e^{ikx}.$$

Gelombang seperti ini menyebar ke seluruh ruang. Ia tidak terlokalisasi. Maka Δx sangat besar.

Inilah inti hubungan Fourier antara posisi dan momentum. Representasi posisi dan momentum bukan dua informasi yang bebas sepenuhnya; keduanya adalah dua cara menyatakan keadaan kuantum yang sama.

9.9 Paket gelombang Gaussian dan batas minimum

Relasi

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

memiliki batas minimum. Ada keadaan yang mencapai kesetaraan:

$$\Delta x \, \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

Contoh pentingnya adalah paket gelombang Gaussian.

Ambil fungsi gelombang

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2} + \frac{ip_0 x}{\hbar}\right].$$

Fungsi ini berpusat di sekitar posisi x_0. Faktor fase

$$e^{ip_0 x/\hbar}$$

memberikan momentum rata-rata p_0. Untuk keadaan ini,

$$\Delta x = \sigma_x,$$

dan hasil transformasi Fouriernya memberikan

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2\sigma_x}.$$

Maka

$$\Delta x \, \Delta p = \sigma_x \frac{\hbar}{2\sigma_x} = \frac{\hbar}{2}.$$

Jadi Gaussian adalah keadaan ketidakpastian minimum.

Contoh ini penting karena memperlihatkan bahwa prinsip ketidakpastian bukan hanya larangan abstrak. Ia juga memberi tahu bentuk keadaan yang paling “efisien” dalam menyeimbangkan lokalisasi posisi dan lokalisasi momentum.

9.10 Tidak ada lintasan klasik tajam

Dalam mekanika klasik, lintasan partikel ditentukan oleh posisi dan momentum pada setiap saat. Jika kita mengetahui $x(t_0)$ dan $p(t_0)$, lalu mengetahui gaya, kita dapat menghitung lintasan berikutnya.

Dalam mekanika kuantum, keadaan partikel tidak diberikan oleh sepasang angka x dan p, melainkan oleh fungsi gelombang atau vektor keadaan. Karena

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

posisi dan momentum tidak dapat memiliki ketajaman simultan tak terbatas.

Ini tidak berarti konsep lintasan selalu tidak berguna. Untuk benda makroskopik, hbar sangat kecil dibanding skala aksi sehari-hari, sehingga ketidakpastian kuantum sering dapat diabaikan. Paket gelombang juga dapat bergerak sedemikian rupa sehingga nilai harapannya mengikuti lintasan yang mendekati hukum Newton. Hubungan ini akan dibahas lebih jelas dalam Bab 10 melalui persamaan Ehrenfest.

Tetapi pada skala atomik, konsep lintasan klasik elektron mengitari inti seperti planet mengitari Matahari tidak tepat. Elektron dalam atom hidrogen, misalnya, lebih tepat dijelaskan oleh orbital: distribusi probabilitas yang diperoleh dari solusi persamaan Schrödinger. Bab 14 akan membahas hal ini secara rinci.

9.11 Ketidakpastian bukan selalu karena pengukuran mengganggu sistem

Salah satu cara historis menjelaskan ketidakpastian adalah melalui eksperimen pikiran mikroskop Heisenberg. Jika kita ingin melihat posisi elektron dengan cahaya berpanjang gelombang sangat pendek, foton yang digunakan memiliki momentum besar dan dapat mengganggu momentum elektron. Penjelasan semacam ini membantu membangun intuisi, dan memang muncul dalam pembahasan awal Heisenberg (Heisenberg, 1927).

Namun formulasi modern lebih mendasar. Relasi

$$\Delta A\,\Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|$$

diturunkan tanpa membicarakan detail alat ukur. Ia berasal dari:

1. struktur ruang Hilbert;
2. definisi simpangan baku;
3. ketaksamaan Cauchy-Schwarz;
4. komutator operator.

Jadi ketidakpastian adalah sifat keadaan kuantum dan aljabar observable, bukan hanya akibat gangguan mekanis oleh alat ukur.

9.12 Komutator nol tidak selalu berarti semua sederhana

Jika

$$[hatA,hatB]=0,$$

maka batas Robertson menjadi

$$\Delta A\,\Delta B \geq 0.$$

Ini tidak memberi batas bawah positif. Tetapi ini tidak otomatis berarti setiap keadaan memiliki nilai pasti untuk A dan B. Artinya lebih tepat:

> Ada basis keadaan bersama yang memungkinkan nilai A dan B tajam sekaligus, jika operator-operator itu memenuhi syarat matematis yang sesuai.

Sebagai contoh, jika hatA dan hatB berkomutasi, tetapi sistem berada dalam superposisi beberapa eigenstate bersama, maka hasil pengukuran A dan B tetap bisa tersebar. Komutator nol membuka kemungkinan kompatibilitas, bukan menjamin semua keadaan memiliki ketidakpastian nol.

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Keduanya berkomutasi. Tetapi keadaan

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bukan eigenstate A, juga bukan eigenstate B. Pengukuran A dapat menghasilkan 1 atau 2, sedangkan pengukuran B dapat menghasilkan 3 atau 5. Jadi meskipun A dan B kompatibel, keadaan tertentu tetap dapat memiliki sebaran hasil pengukuran.

9.13 Komutator dan degenerasi

Ada satu kehalusan penting. Jika suatu operator memiliki eigenvalue yang degenerat, yaitu satu eigenvalue memiliki lebih dari satu eigenstate independen, maka pengukuran operator itu belum tentu menentukan keadaan secara unik.

Misalkan hatA memiliki eigenvalue a dengan ruang eigen berdimensi dua. Jika kita mengukur A dan memperoleh a, kita hanya tahu bahwa keadaan berada dalam subruang tersebut, tetapi belum tahu arah tepatnya di dalam subruang itu.

Dalam kasus seperti ini, observable lain hatB yang berkomutasi dengan hatA dapat membantu membedakan keadaan-keadaan dalam subruang degenerat. Itulah sebabnya dalam mekanika kuantum kita sering mencari himpunan operator yang saling berkomutasi dan cukup lengkap untuk memberi label keadaan.

Nanti dalam atom hidrogen, kita akan memakai beberapa operator yang saling berkomutasi, misalnya Hamiltonian, kuadrat momentum sudut, dan salah satu komponen momentum sudut. Keadaan atom kemudian diberi label oleh beberapa bilangan kuantum.

9.14 Komutator sebagai pengukur “ketidakklasikan”

Komutator posisi-momentum

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

memperlihatkan bahwa hbar mengukur skala ketidakkomutatifan mekanika kuantum.

Jika secara formal kita membayangkan limit

$$\hbar \to 0,$$

maka

\[[hatx,hat

Document information

Bab 9: Komutator dan Prinsip Ketidakpastian

Project	Mekanika Kuantum
Document	Document 1.13
Author	terry.mart
Verifier	Not verified
Downloaded	July 06, 2026 01:23 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/mekanika-kuantum/documents/bab-9-komutator--dan-prinsip-ketidakpastian/