Bab 5: Persamaan Schrödinger Satu Dimensi

Pada Bab 3 kita memperkenalkan persamaan Schrödinger sebagai persamaan gerak untuk fungsi gelombang. Pada Bab 4 kita menafsirkan fungsi gelombang secara probabilistik: $|\psi(x,t)|^2$ adalah rapat probabilitas menemukan partikel di sekitar posisi x pada waktu t.

Sekarang kita mulai menggunakan persamaan itu sebagai alat kerja.

Bab ini berfokus pada sistem satu dimensi, yaitu sistem yang posisinya dapat dinyatakan dengan satu koordinat x. Tentu saja dunia nyata tiga dimensi, tetapi banyak gagasan dasar mekanika kuantum terlihat paling jernih dalam satu dimensi. Di sini kita akan mempelajari bentuk persamaan Schrödinger bergantung waktu, persamaan Schrödinger tak bergantung waktu, keadaan stasioner, syarat batas, kuantisasi energi, dan peran Hamiltonian.

Persamaan Schrödinger pertama kali diperkenalkan oleh Erwin Schrödinger pada tahun 1926 dalam rangka memformulasikan kuantisasi sebagai persoalan nilai eigen, terutama untuk menjelaskan struktur atom secara gelombang (Schrödinger, 1926). Dalam bentuk modern, persamaan ini menjadi salah satu postulat dasar mekanika kuantum nonrelativistik dan dibahas secara sistematis dalam buku-buku standar mekanika kuantum tingkat sarjana dan pascasarjana (Griffiths & Schroeter, 2018; Shankar, 1994).

5.1 Sistem satu dimensi dan fungsi gelombang

Dalam bab ini kita membayangkan sebuah partikel bermassa m yang bergerak sepanjang satu garis. Posisi partikel dinyatakan oleh satu bilangan real x. Keadaan kuantumnya dinyatakan oleh fungsi gelombang

$$\psi(x,t),$$

dengan t menyatakan waktu.

Seperti dibahas pada Bab 4, $\psi(x,t)$ sendiri bukan probabilitas. Yang mempunyai makna probabilistik langsung adalah

$$|\psi(x,t)|^2.$$

Jika fungsi gelombang ternormalisasi, maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1.$$

Artinya, jika partikel benar-benar berada di suatu tempat pada garis satu dimensi, total probabilitas menemukannya di seluruh ruang harus sama dengan 1.

Jika kita ingin mengetahui probabilitas menemukan partikel antara a dan b, kita hitung

$$P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} |\psi(x,t)|^2 \, dx.$$

Contoh sederhana: jika $|\psi(x,t)|^2$ besar di sekitar $x=0$, maka partikel lebih mungkin ditemukan dekat $x=0$. Jika $|\psi(x,t)|^2$ hampir nol di suatu daerah, maka peluang menemukan partikel di daerah itu sangat kecil.

Namun fungsi gelombang tidak dapat dipilih sembarang. Ia harus berevolusi menurut hukum dinamika kuantum. Untuk partikel nonrelativistik satu dimensi, hukum itu adalah persamaan Schrödinger.

5.2 Persamaan Schrödinger bergantung waktu

Bentuk umum persamaan Schrödinger bergantung waktu untuk satu partikel dalam satu dimensi adalah

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t) \right] \psi(x,t).$$

Persamaan ini sering disebut time-dependent Schrödinger equation, atau TDSE.

Mari kita uraikan setiap bagian.

Simbol i adalah satuan imajiner, dengan

$$i^2 = -1.$$

Simbol hbar, dibaca “h-bar”, adalah konstanta Planck tereduksi:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Besaran m adalah massa partikel. Fungsi V(x,t) adalah energi potensial partikel. Jika partikel berada dalam medan gaya tertentu, misalnya medan listrik atau medan yang membentuk sumur potensial, pengaruh lingkungan terhadap partikel sering dimasukkan melalui V(x,t).

Bagian

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

berkaitan dengan energi kinetik. Dalam mekanika klasik, energi kinetik partikel bebas adalah

$$K = \frac{p^2}{2m}.$$

Dalam mekanika kuantum, momentum p tidak lagi hanya dianggap sebagai bilangan biasa, tetapi berkaitan dengan operasi turunan terhadap posisi. Secara kasar, hubungan ini menghasilkan penggantian

$$p \longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x},$$

sehingga

$$\frac{p^2}{2m} \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Ide ini akan dibahas lebih matang dalam Bab 7 dan Bab 8 ketika kita mempelajari ruang Hilbert dan operator. Untuk sekarang, cukup pahami bahwa dalam persamaan Schrödinger, energi kinetik muncul sebagai turunan kedua terhadap posisi.

Persamaan Schrödinger adalah persamaan diferensial parsial. Artinya, persamaan ini melibatkan turunan terhadap lebih dari satu variabel, yaitu posisi x dan waktu t. Turunan

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

mengukur perubahan fungsi gelombang terhadap waktu, sedangkan

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

mengukur kelengkungan fungsi gelombang terhadap posisi.

Secara fisik, TDSE memberi tahu kita bagaimana fungsi gelombang berubah dari waktu ke waktu jika kita mengetahui energi potensial V(x,t).

5.3 Hamiltonian: operator energi total

Persamaan Schrödinger sering ditulis dalam bentuk lebih ringkas:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

Simbol hatH disebut Hamiltonian.

Dalam mekanika klasik, Hamiltonian biasanya menyatakan energi total sistem, yaitu energi kinetik ditambah energi potensial. Untuk partikel satu dimensi nonrelativistik,

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Dalam mekanika kuantum, Hamiltonian menjadi sebuah operator. Untuk sementara, kita dapat memahami operator sebagai aturan yang mengubah suatu fungsi menjadi fungsi lain. Misalnya, operator turunan

$$\frac{d}{dx}$$

mengubah fungsi f(x) menjadi fungsi turunannya f'(x).

Untuk partikel satu dimensi, Hamiltonian kuantum berbentuk

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t).$$

Jika operator ini bekerja pada fungsi gelombang ψ(x,t), hasilnya adalah

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi.$$

Jadi persamaan Schrödinger dapat dibaca sebagai:

> perubahan waktu fungsi gelombang ditentukan oleh operator energi total sistem.

Dalam bahasa yang lebih maju, Hamiltonian adalah generator evolusi waktu. Maksudnya, jika kita mengetahui Hamiltonian dan keadaan awal ψ(x,0), maka persamaan Schrödinger menentukan keadaan ψ(x,t) pada waktu berikutnya. Peran Hamiltonian sebagai pengatur evolusi waktu merupakan bagian inti dari formulasi modern mekanika kuantum (Cohen-Tannoudji, Diu, & Laloë, 1977; Shankar, 1994).

5.4 Potensial tak bergantung waktu

Banyak sistem penting memiliki energi potensial yang tidak berubah terhadap waktu. Dalam kasus ini,

$$V(x,t) = V(x).$$

Contohnya, partikel dalam sumur potensial tetap, elektron dalam model sederhana atom, atau osilator harmonik kuantum dengan pegas ideal. Potensial dapat bergantung pada posisi, tetapi tidak berubah seiring waktu.

Untuk potensial tak bergantung waktu, persamaan Schrödinger menjadi

$$i\hbar\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t).$$

Kasus ini sangat penting karena kita dapat mencari solusi khusus yang memisahkan bagian posisi dan bagian waktu.

Kita coba bentuk

$$\psi(x,t) = \phi(x)T(t),$$

dengan φ(x) hanya bergantung pada posisi dan T(t) hanya bergantung pada waktu.

Substitusi ke persamaan Schrödinger menghasilkan

$$i\hbar\phi(x)\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + V(x)\phi(x)\right].$$

Bagi kedua sisi dengan φ(x)T(t), selama fungsi tidak nol pada daerah yang dibahas:

$$i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{\phi(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + V(x)\phi(x)\right].$$

Sisi kiri hanya bergantung pada t. Sisi kanan hanya bergantung pada x. Agar keduanya sama untuk semua x dan t, keduanya harus sama dengan suatu konstanta. Konstanta ini kita sebut E.

Maka kita memperoleh dua persamaan:

$$i\hbar\frac{dT}{dt} = ET,$$

dan

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi = E\phi.$$

Persamaan kedua inilah yang disebut persamaan Schrödinger tak bergantung waktu.

5.5 Persamaan Schrödinger tak bergantung waktu

Persamaan Schrödinger tak bergantung waktu satu dimensi adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+V(x)\phi(x)=E\phi(x).$$

Dengan Hamiltonian

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x),$$

persamaan ini dapat ditulis ringkas sebagai

$$\hat{H}\phi=E\phi.$$

Bentuk ini sangat penting.

Jika suatu operator bekerja pada suatu fungsi dan hasilnya adalah fungsi yang sama dikalikan suatu bilangan, maka fungsi itu disebut fungsi eigen atau eigenfunction dari operator tersebut. Bilangan pengalinya disebut nilai eigen atau eigenvalue.

Jadi dalam persamaan

$$\hat{H}\phi=E\phi,$$

fungsi φ adalah fungsi eigen Hamiltonian, dan E adalah nilai eigen energi.

Secara fisik, ini berarti:

> keadaan φ(x) memiliki energi tertentu E.

Itulah sebabnya persamaan Schrödinger tak bergantung waktu sering disebut persoalan nilai eigen energi. Schrödinger sendiri memformulasikan kuantisasi dalam bahasa nilai eigen ketika mengembangkan mekanika gelombangnya (Schrödinger, 1926).

Bagian waktu dari solusi juga dapat diselesaikan. Dari

$$i\hbar\frac{dT}{dt}=ET,$$

kita peroleh

$$T(t) = e^{-iEt/\hbar},$$

hingga faktor konstanta.

Maka solusi lengkapnya berbentuk

$$\psi(x,t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}.$$

Solusi seperti ini disebut keadaan stasioner.

5.6 Apa arti keadaan stasioner?

Kata “stasioner” dapat menyesatkan jika dibaca terlalu cepat. Fungsi gelombang

$$\psi(x,t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

jelas masih bergantung pada waktu, karena ada faktor

$$e^{-iEt/\hbar}.$$

Namun rapat probabilitasnya adalah

$$|\psi(x,t)|^2 = |\phi(x)e^{-iEt/\hbar}|^2.$$

Karena

$$|e^{-iEt/\hbar}|^2 = 1,$$

maka

$$|\psi(x,t)|^2 = |\phi(x)|^2.$$

Jadi rapat probabilitas tidak berubah terhadap waktu.

Inilah makna keadaan stasioner:

> fungsi gelombang boleh memiliki fase kompleks yang berubah terhadap waktu, tetapi distribusi probabilitas posisinya tetap.

Contoh: bayangkan elektron dalam keadaan energi tertentu di dalam sumur potensial. Fungsi gelombangnya memiliki faktor waktu kompleks, tetapi pola peluang menemukan elektron di setiap posisi tidak berubah. Karena itu keadaan tersebut disebut stasioner.

Namun jika keadaan merupakan superposisi dua energi berbeda, misalnya

$$\psi(x,t) = c_1\phi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\phi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar},$$

maka rapat probabilitas umumnya dapat berubah terhadap waktu. Penyebabnya adalah fase relatif antara dua komponen,

$$e^{-iE_1t/\hbar} \quad \text{dan} \quad e^{-iE_2t/\hbar},$$

berubah seiring waktu.

Jadi keadaan dengan energi pasti bersifat stasioner dalam rapat probabilitas, tetapi superposisi beberapa energi tidak harus stasioner.

5.7 Contoh pertama: partikel bebas

Contoh paling sederhana adalah partikel bebas, yaitu partikel yang tidak mengalami potensial:

$$V(x) = 0.$$

Persamaan Schrödinger tak bergantung waktu menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} = E\phi.$$

Kita dapat menulis ulang sebagai

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2\phi = 0,$$

dengan

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Persamaan diferensial

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2\phi = 0$$

memiliki solusi sinusoidal atau eksponensial kompleks:

$$\phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

Di sini A dan B adalah konstanta.

Energinya adalah

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Ini cocok dengan hubungan klasik

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

jika momentum dikaitkan dengan bilangan gelombang melalui

$$p = \hbar k.$$

Hubungan ini sejalan dengan gagasan de Broglie yang telah kita pelajari sebelumnya.

Namun ada hal penting: fungsi

$$e^{ikx}$$

tersebar di seluruh ruang dan tidak dapat dinormalisasi dengan integral biasa di seluruh garis real. Artinya, gelombang bidang murni adalah idealisasi matematis. Dalam situasi fisik yang lebih realistis, kita memakai paket gelombang, yaitu superposisi banyak gelombang bidang dengan nilai k yang berdekatan, sehingga probabilitas dapat terlokalisasi dalam ruang.

Contoh partikel bebas mengajarkan dua hal. Pertama, persamaan Schrödinger menghasilkan hubungan energi-momentum yang benar untuk partikel nonrelativistik. Kedua, solusi energi pasti tidak selalu langsung merupakan fungsi gelombang ternormalisasi biasa jika ruangnya tak terbatas. Hal ini akan menjadi penting ketika kita mempelajari representasi momentum dan normalisasi delta Dirac pada bab-bab berikutnya.

5.8 Mengapa energi dapat terkuantisasi?

Dalam mekanika klasik, energi partikel sering dapat berubah secara kontinu. Misalnya, bola dalam kotak dapat bergerak dengan kecepatan kecil atau besar, sehingga energi kinetiknya dapat mengambil banyak nilai.

Dalam mekanika kuantum, energi juga dapat kontinu dalam beberapa sistem, seperti partikel bebas. Tetapi dalam sistem terikat, energi sering hanya boleh mengambil nilai tertentu. Kita menyebutnya energi terkuantisasi.

Kata “terkuantisasi” berarti nilai yang diperbolehkan tidak membentuk rentang kontinu, melainkan himpunan diskret. Misalnya, energi yang mungkin dapat berbentuk

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ldots$$

bukan semua bilangan antara E_1 dan E_3.

Dari mana kuantisasi muncul?

Jawaban matematisnya: kuantisasi muncul karena fungsi gelombang harus memenuhi persamaan diferensial sekaligus syarat fisik tertentu, terutama syarat normalisasi dan syarat batas.

Untuk memahami ini, mari gunakan contoh sederhana.

5.9 Contoh penting: partikel dalam kotak tak hingga

Misalkan partikel terperangkap di antara x=0 dan x=L. Di luar daerah itu, partikel tidak dapat berada. Model ideal ini disebut sumur potensial tak hingga atau kotak satu dimensi tak hingga.

Potensialnya ditulis

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L, \\ \infty, & x \leq 0 \text{ atau } x \geq L. \end{cases}$$

Di dalam kotak, persamaan Schrödinger tak bergantung waktu adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} = E\phi.$$

Solusinya berbentuk

$$\phi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx),$$

dengan

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Karena partikel tidak dapat berada di luar kotak, fungsi gelombang harus nol di dinding:

$$\phi(0) = 0,$$

dan

$$\phi(L) = 0.$$

Syarat pertama memberi

$$\phi(0) = A\sin(0) + B\cos(0) = B = 0.$$

Jadi

$$\phi(x) = A\sin(kx).$$

Syarat kedua memberi

$$\phi(L) = A\sin(kL) = 0.$$

Agar solusi tidak nol di seluruh ruang, kita memerlukan

$$\sin(kL) = 0.$$

Ini terjadi jika

$$kL = n\pi,$$

dengan

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Maka

$$k_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Energi yang diperbolehkan adalah

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}.$$

Jadi energi partikel dalam kotak tak hingga tidak boleh sembarang. Energi hanya boleh bernilai

$$E_1,\ E_2,\ E_3, \dots$$

dengan

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}.$$

Inilah contoh jelas bagaimana kuantisasi energi muncul dari syarat batas.

Fungsi gelombang yang telah dinormalisasi adalah

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 < x < L.$$

Faktor

$$\sqrt{\frac{2}{L}}$$

dipilih agar

$$\int_0^L |\phi_n(x)|^2\, dx = 1.$$

Keadaan lengkapnya adalah

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-iE_n t/\hbar}.$$

Model ini akan kita pelajari lebih rinci pada Bab 6. Untuk saat ini, yang penting adalah gagasan utamanya:

> energi terkuantisasi karena hanya panjang gelombang tertentu yang cocok dengan syarat batas kotak.

Analogi klasiknya adalah senar gitar. Senar dengan panjang tetap hanya mendukung pola gelombang berdiri tertentu. Mekanika kuantum memperlihatkan pola serupa, tetapi yang “berdiri” adalah amplitudo probabilitas partikel.

5.10 Syarat batas dan syarat fisik fungsi gelombang

Tidak semua solusi matematis persamaan Schrödinger dapat diterima sebagai keadaan fisik. Fungsi gelombang harus memenuhi beberapa syarat.

Pertama, fungsi gelombang harus dapat dinormalisasi, jika kita sedang membahas keadaan terikat biasa. Artinya,

$$\int |\psi(x,t)|^2 \, dx$$

harus bernilai hingga dan dapat dibuat sama dengan 1.

Jika integral ini tak hingga, maka $|\psi|^2$ tidak dapat ditafsirkan sebagai rapat probabilitas biasa. Ada pengecualian teknis untuk keadaan ideal seperti gelombang bidang partikel bebas, tetapi untuk keadaan terikat, normalisasi adalah syarat utama.

Kedua, fungsi gelombang harus bernilai tunggal. Pada satu posisi dan satu waktu, $\psi(x,t)$ harus memiliki satu nilai tertentu. Jika satu posisi memberikan dua nilai fungsi gelombang berbeda, interpretasi probabilistik menjadi tidak jelas.

Ketiga, fungsi gelombang biasanya harus kontinu. Artinya, $\psi(x,t)$ tidak boleh melompat mendadak dari satu nilai ke nilai lain, kecuali dalam model ideal tertentu yang perlu diperlakukan hati-hati.

Keempat, untuk potensial yang berhingga, turunan pertama fungsi gelombang juga kontinu. Syarat ini dapat dilihat dari persamaan Schrödinger tak bergantung waktu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi = E\phi.$$

Jika $V(x)$ berhingga di sekitar suatu titik, maka turunan kedua tidak boleh mengandung singularitas yang menyebabkan turunan pertama melompat. Dengan kata lain, untuk potensial berhingga, biasanya berlaku

$$\phi \text{ kontinu}$$

dan

$$\frac{d\phi}{dx} \text{ kontinu.}$$

Namun untuk potensial tak hingga, seperti dinding kotak ideal, syaratnya berbeda. Pada sumur tak hingga, fungsi gelombang dipaksa nol di luar kotak dan di dinding, sehingga turunan pertama tidak harus kontinu di dinding ideal. Ini bukan kontradiksi; ini akibat model potensial tak hingga sebagai idealisasi.

Syarat batas bukan sekadar formalitas. Syarat batas menentukan solusi mana yang fisik. Dalam contoh kotak tak hingga, persamaan diferensialnya mengizinkan banyak nilai k, tetapi syarat

$$\phi(0) = 0 \quad \text{dan} \quad \phi(L) = 0$$

memilih hanya

$$k = \frac{n\pi}{L}.$$

Dari sinilah energi diskret muncul.

5.11 Superposisi keadaan stasioner

Persamaan Schrödinger bersifat linear. Artinya, jika ψ_1 dan ψ_2 adalah solusi, maka kombinasi

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

juga solusi, selama c_1 dan c_2 adalah konstanta kompleks.

Sifat linear ini sangat penting dalam mekanika kuantum. Ia memungkinkan superposisi, yaitu keadaan kuantum yang merupakan gabungan beberapa keadaan.

Jika Hamiltonian tidak bergantung waktu dan memiliki fungsi eigen

$$\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n,$$

maka solusi umum dapat ditulis sebagai superposisi

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \phi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar},$$

untuk spektrum energi diskret. Jika spektrumnya kontinu, penjumlahan diganti oleh integral.

Koefisien c_n menyatakan seberapa besar kontribusi keadaan energi E_n dalam keadaan total. Dalam interpretasi probabilistik, jika fungsi-fungsi φ_n telah dinormalisasi dan saling ortogonal, maka $|c_n|^2$ memberi probabilitas memperoleh energi E_n ketika energi diukur. Pernyataan ini akan diformalkan lebih teliti dalam Bab 7 dan Bab 8 ketika kita membahas basis, hasil kali dalam, observable, dan pengukuran.

Sebagai contoh, dalam kotak tak hingga, keadaan

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2(x)$$

bukan keadaan energi pasti. Jika energi diukur, hasilnya dapat berupa E_1 atau E_2, masing-masing dengan probabilitas 1/2, asalkan keadaan telah dinormalisasi dengan benar.

Evolusi waktunya adalah

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1(x)e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2(x)e^{-iE_2 t/\hbar}.$$

Karena dua faktor fase berubah dengan laju berbeda, bentuk rapat probabilitas dapat berubah terhadap waktu. Ini menunjukkan bahwa superposisi keadaan stasioner tidak selalu stasioner.

5.12 Nilai harapan energi

Pada Bab 4 kita mempelajari nilai harapan posisi. Sekarang kita dapat menuliskan nilai harapan energi.

Jika Hamiltonian sistem adalah

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

maka nilai harapan energi dalam keadaan ψ adalah

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \hat{H} \psi(x,t) \, dx.$$

Simbol ψ^ menyatakan kompleks konjugat dari ψ.

Jika ψ adalah keadaan energi pasti,

$$\hat{H}\psi = E\psi,$$

maka

$$\langle E \rangle = \int \psi^* E \psi \, dx = E \int |\psi|^2 \, dx.$$

Untuk fungsi gelombang ternormalisasi,

$$\int |\psi|^2 \, dx = 1,$$

sehingga

$$\langle E \rangle = E.$$

Ini masuk akal: jika sistem berada dalam keadaan energi pasti, nilai harapan energinya sama dengan energi itu.

Namun jika keadaan adalah superposisi beberapa energi, nilai harapan energi merupakan rata-rata berbobot dari kemungkinan hasil ukur energi. Misalnya, jika

$$\psi = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2,$$

dengan φ_1 dan φ_2 keadaan energi yang ternormalisasi dan ortogonal, maka

$$\langle E \rangle = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2,$$

asalkan

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1.$$

Ini bukan berarti energi "sebenarnya" berada separuh di E_1 dan separuh di E_2 seperti campuran klasik biasa. Dalam mekanika kuantum, sebelum pengukuran, keadaan dapat berupa superposisi. Saat energi diukur, hasil yang muncul adalah salah satu nilai eigen yang mungkin, dengan probabilitas yang ditentukan oleh koefisien superposisi. Formulasi matematis ini adalah bagian pokok teori pengukuran kuantum (Griffiths & Schroeter, 2018).

5.13 Mengapa persamaan Schrödinger memakai turunan waktu orde satu?

Persamaan Schrödinger bergantung waktu memiliki bentuk

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

Perhatikan bahwa persamaan ini hanya mengandung turunan pertama terhadap waktu. Ini berbeda dari persamaan gelombang klasik pada tali, yang biasanya mengandung turunan kedua terhadap waktu.

Apa akibatnya?

Jika kita mengetahui $\psi(x,0)$, maka persamaan Schrödinger menentukan perubahan waktu selanjutnya. Kita tidak perlu memberikan "kecepatan awal" fungsi gelombang secara terpisah seperti pada persamaan gelombang klasik orde dua.

Hal ini cocok dengan struktur probabilistik mekanika kuantum: keadaan kuantum pada satu waktu sudah memuat informasi lengkap yang diperlukan untuk memprediksi probabilitas pada waktu berikutnya, selama Hamiltonian diketahui.

Namun karena ada faktor i, evolusi waktu tidak membuat probabilitas total hilang atau bertambah, selama Hamiltonian memenuhi syarat fisik yang tepat. Untuk potensial real dan Hamiltonian yang sesuai, normalisasi dipertahankan:

$$\int |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1$$

jika pada awalnya

$$\int |\psi(x,0)|^2 \, dx = 1.$$

Secara fisik, ini berarti partikel tidak menghilang dari ruang probabilitas. Total peluang tetap 1. Konservasi probabilitas adalah salah satu alasan mengapa bentuk persamaan Schrödinger sangat khusus dan bukan sekadar persamaan gelombang biasa (Shankar, 1994).

5.14 Energi nol tidak selalu berarti diam

Dalam mekanika klasik, jika sebuah partikel bebas memiliki energi kinetik nol, maka momentumnya nol dan partikel diam. Dalam mekanika kuantum, situasi dapat lebih halus, terutama jika partikel terkurung.

Pada kotak tak hingga, energi terendah adalah

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

Nilai ini tidak nol.

Mengapa partikel tidak dapat memiliki energi nol di dalam kotak?

Jika energi nol, maka k=0, dan solusi di dalam kotak tidak berbentuk gelombang sinus yang memiliki simpul di kedua ujung. Secara matematis, solusi yang memenuhi

$$\phi(0) = 0$$

dan

$$\phi(L) = 0$$

dengan E=0 hanya solusi trivial

$$\phi(x) = 0$$

di seluruh kotak. Tetapi fungsi nol bukan fungsi gelombang fisik, karena tidak dapat dinormalisasi menjadi probabilitas total 1.

Jadi keadaan energi terendah tetap memiliki energi positif. Energi terendah ini sering disebut energi titik-nol dalam konteks sistem terikat seperti osilator harmonik, meskipun istilah itu akan kita bahas lebih dalam pada Bab 11.

Contoh kotak menunjukkan gagasan penting:

> keterkurungan ruang menyebabkan ketidakmungkinan partikel memiliki momentum pasti nol secara sederhana.

Ini berkaitan dengan prinsip ketidakpastian yang akan dibahas secara formal pada Bab 9. Jika posisi partikel dibatasi dalam daerah kecil, sebaran momentumnya tidak bisa nol seluruhnya.

5.15 Cara membaca persamaan Schrödinger secara fisik

Pada tahap ini, persamaan

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t) \right] \psi$$

mungkin terlihat hanya sebagai rumus panjang. Mari kita baca secara bertahap.

Bagian kiri,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

menyatakan perubahan fungsi gelombang terhadap waktu.

Bagian kanan memiliki dua bagian. Pertama,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

berkaitan dengan kelengkungan fungsi gelombang dan energi kinetik. Jika fungsi gelombang berubah sangat cepat terhadap posisi, turunan keduanya besar. Secara umum, variasi spasial yang cepat berkaitan dengan momentum dan energi kinetik yang besar.

Kedua,

$$V(x,t)\psi,$$

menyatakan pengaruh energi potensial pada fungsi gelombang. Potensial menentukan daerah mana yang energetically mudah atau sulit diakses oleh partikel.

Contoh: jika V(x) sangat besar di suatu daerah, partikel dengan energi rendah cenderung memiliki amplitudo kecil di sana. Tetapi berbeda dari mekanika klasik, amplitudo tidak selalu langsung nol. Pada potensial penghalang berhingga, fungsi gelombang dapat menembus sebagian ke daerah yang secara klasik terlarang. Fenomena ini disebut efek terowongan, dan akan menjadi salah satu tema utama Bab 6.

5.16 Ringkasan bab

Dalam bab ini kita mulai menggunakan persamaan Schrödinger sebagai alat utama mekanika kuantum satu dimensi.

Persamaan Schrödinger bergantung waktu adalah

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right]\psi(x,t).$$

Operator di sisi kanan disebut Hamiltonian:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t).$$

Hamiltonian menyatakan energi total sistem dan menentukan evolusi waktu fungsi gelombang.

Jika potensial tidak bergantung waktu, kita dapat mencari solusi terpisah:

$$\psi(x,t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}.$$

Bagian posisi memenuhi persamaan Schrödinger tak bergantung waktu:

$$\hat{H}\phi = E\phi.$$

Ini adalah persoalan nilai eigen. Fungsi φ adalah fungsi eigen Hamiltonian, dan E adalah energi yang mungkin.

Keadaan dengan energi pasti disebut keadaan stasioner karena rapat probabilitasnya tidak berubah terhadap waktu:

$$|\psi(x,t)|^2 = |\phi(x)|^2.$$

Energi dapat menjadi diskret jika fungsi gelombang harus memenuhi syarat batas tertentu. Contoh paling jelas adalah partikel dalam kotak tak hingga, dengan energi

\[E□=fracn□π□hbar□

Document information

Bab 5: Persamaan Schrödinger Satu Dimensi

Project	Mekanika Kuantum
Document	Document 1.9
Author	terry.mart
Verifier	Not verified
Downloaded	July 06, 2026 01:22 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/mekanika-kuantum/documents/bab-5-persamaan-schrodinger-satu-dimensi/