Bab 4: Fungsi Gelombang dan Interpretasi Probabilistik

Pada Bab 3 kita sampai pada persamaan Schrödinger sebagai persamaan gerak untuk gelombang materi nonrelativistik. Kita menulis suatu fungsi

$$\psi(x, t),$$

yang bergantung pada posisi x dan waktu t. Fungsi ini disebut fungsi gelombang. Secara matematis, ψ dapat berupa bilangan kompleks. Secara fisika, ia menyimpan informasi tentang keadaan kuantum sebuah partikel.

Tetapi pertanyaan terpenting belum dijawab:

> Apa arti fisik fungsi gelombang?

Jika $\psi(x,t)$ adalah gelombang air, kita dapat mengatakan bahwa nilainya menunjukkan ketinggian permukaan air. Jika $\psi(x,t)$ adalah gelombang bunyi, nilainya dapat berkaitan dengan tekanan udara. Tetapi elektron bukan air dan bukan udara. Jadi, ketika kita menulis fungsi gelombang elektron, apa yang sebenarnya “bergelombang”?

Jawaban modernnya adalah: yang diberikan oleh fungsi gelombang bukan lintasan pasti partikel, melainkan amplitudo probabilitas. Dari amplitudo ini kita memperoleh peluang menemukan partikel di daerah tertentu. Gagasan ini dikenal sebagai interpretasi probabilistik atau interpretasi Born, karena Max Born mengusulkan hubungan antara fungsi gelombang dan probabilitas dalam konteks hamburan kuantum pada tahun 1926 (Born, 1926).

Bab ini membangun makna tersebut secara hati-hati. Kita akan mulai dari gagasan probabilitas biasa, lalu masuk ke rapat probabilitas, normalisasi, arus probabilitas, nilai harapan, dan ketidakpastian. Di akhir bab, kita akan melihat perbedaan besar antara prediksi klasik yang deterministik dan prediksi kuantum yang probabilistik.

4.1 Dari lintasan klasik ke keadaan kuantum

Dalam mekanika klasik, keadaan sebuah partikel satu dimensi biasanya ditentukan oleh dua besaran:

$$x(t) \quad \text{dan} \quad p(t),$$

yaitu posisi dan momentum pada waktu t. Jika kita mengetahui posisi awal, momentum awal, dan gaya yang bekerja, maka hukum Newton memungkinkan kita menghitung posisi dan momentum pada waktu berikutnya.

Sebagai contoh, jika sebuah partikel bermassa m bergerak bebas tanpa gaya, momentumnya konstan:

$$p = mv.$$

Jika posisi awalnya x_0, maka posisinya pada waktu t adalah

$$x(t) = x_0 + vt.$$

Gambaran ini sangat jelas: partikel mempunyai posisi tertentu setiap saat. Ketidakpastian dalam prediksi klasik biasanya dianggap berasal dari ketidaktahuan kita. Misalnya, jika kita tidak tahu kecepatan bola dengan tepat, prediksi lintasannya menjadi tidak tepat. Tetapi secara prinsip, lintasan bola tetap dianggap ada.

Dalam mekanika kuantum, keadaan partikel tidak diberikan oleh lintasan x(t). Keadaan diberikan oleh fungsi gelombang

$$\psi(x, t).$$

Fungsi ini bukan sekadar alat bantu matematika. Ia adalah objek utama yang dipakai untuk menghitung semua prediksi fisika kuantum. Namun prediksi yang dihasilkan bukan “partikel pasti berada di x”, melainkan “peluang menemukan partikel di sekitar x adalah sekian”.

Di sinilah perubahan cara berpikir dimulai.

4.2 Apa itu amplitudo probabilitas?

Sebelum memahami ψ, kita perlu membedakan dua hal:

1. probabilitas,
2. amplitudo probabilitas.

Probabilitas adalah bilangan nyata antara 0 dan 1. Jika peluang suatu peristiwa adalah 0, peristiwa itu tidak mungkin terjadi. Jika peluangnya 1, peristiwa itu pasti terjadi. Jika peluangnya 1/2, peristiwa itu memiliki peluang 50%.

Contoh sederhana: ketika melempar koin ideal, peluang memperoleh sisi gambar adalah

$$P(\text{gambar}) = \frac{1}{2}.$$

Probabilitas selalu tak negatif:

$$P \geq 0.$$

Fungsi gelombang ψ, sebaliknya, dapat bernilai negatif, positif, atau kompleks. Jadi ψ sendiri tidak dapat langsung ditafsirkan sebagai probabilitas.

Misalnya, jika

$$\psi = -2,$$

tidak masuk akal mengatakan “probabilitasnya -2”. Probabilitas negatif tidak ada dalam teori probabilitas biasa. Jika

$$\psi = 1 + i,$$

nilai ini bahkan bukan bilangan nyata. Maka ψ bukan probabilitas.

Dalam mekanika kuantum, ψ disebut amplitudo probabilitas. Kata “amplitudo” berarti besaran dasar yang, setelah diolah dengan aturan tertentu, menghasilkan probabilitas. Aturan Born menyatakan bahwa probabilitas diperoleh dari kuadrat modulus fungsi gelombang:

$$|\psi(x,t)|^2.$$

Jika ψ adalah bilangan kompleks,

$$\psi = a + ib,$$

dengan a dan b bilangan nyata, maka modulus kuadratnya adalah

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi = a^2 + b^2.$$

Simbol ψ^ menyatakan kompleks konjugat dari ψ. Jika

$$\psi = a + ib,$$

maka

$$\psi^* = a - ib.$$

Karena

$$|\psi|^2 = a^2 + b^2 \geq 0,$$

maka $|\psi|^2$ cocok menjadi dasar probabilitas.

4.3 Interpretasi Born

Untuk partikel satu dimensi, interpretasi Born menyatakan bahwa

$$|\psi(x,t)|^2 \, dx$$

adalah probabilitas menemukan partikel di antara posisi x dan x+dx pada waktu t.

Besaran

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$$

disebut rapat probabilitas. Kata “rapat” berarti probabilitas per satuan panjang. Ia bukan probabilitas langsung pada satu titik, melainkan kepadatan probabilitas di sekitar titik tersebut.

Ini penting karena dalam ruang kontinu, probabilitas menemukan partikel tepat di satu titik tertentu biasanya nol. Yang bermakna adalah probabilitas menemukan partikel dalam suatu interval.

Jika kita ingin mengetahui probabilitas menemukan partikel antara a dan b, kita menghitung

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b |\psi(x,t)|^2 \, dx.$$

Contoh: misalkan sebuah partikel memiliki rapat probabilitas seragam di antara 0 dan L, dan nol di luar daerah itu. Artinya,

$$|\psi(x)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{L}, & 0 \le x \le L, \\ 0, & \text{di luar daerah itu.} \end{cases}$$

Probabilitas menemukan partikel antara 0 dan L/4 adalah

$$P\left(0 \le x \le \frac{L}{4}\right) = \int_0^{L/4} \frac{1}{L} \, dx = \frac{1}{L} \cdot \frac{L}{4} = \frac{1}{4}.$$

Jadi peluangnya 25%.

Interpretasi Born bukan tambahan kecil. Ia mengubah arti seluruh teori. Fungsi gelombang tidak memberi posisi pasti, melainkan distribusi peluang hasil pengukuran. Dalam buku-buku mekanika kuantum modern, aturan Born menjadi salah satu postulat dasar teori kuantum (Griffiths & Schroeter, 2018; Shankar, 1994).

4.4 Normalisasi: total peluang harus satu

Jika partikel pasti berada di suatu tempat pada garis satu dimensi, maka probabilitas menemukannya di seluruh ruang harus sama dengan 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1.$$

Syarat ini disebut normalisasi.

Secara fisika, normalisasi berarti “jika kita mencari partikel di semua tempat yang mungkin, peluang menemukannya adalah 100%”.

Jika suatu fungsi gelombang memenuhi syarat ini, kita menyebutnya ternormalisasi.

Contoh normalisasi sederhana

Misalkan fungsi gelombang partikel dalam daerah $0 \leq x \leq L$ adalah

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

dan $\psi(x)=0$ di luar daerah itu. Kita ingin mencari konstanta A agar fungsi ini ternormalisasi.

Syarat normalisasi adalah

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1.$$

Karena $\psi(x)=0$ di luar $0 \leq x \leq L$, integralnya menjadi

$$\int_{0}^{L} |A|^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \, dx = 1.$$

Jika A kita ambil nyata dan positif, maka $|A|^2=A^2$. Kita gunakan hasil integral

$$\int_{0}^{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \, dx = \frac{L}{2}.$$

Maka

$$A^2 \frac{L}{2} = 1.$$

Jadi

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Fungsi gelombang ternormalisasinya adalah

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Fungsi seperti ini akan muncul kembali ketika kita membahas partikel dalam sumur potensial tak hingga pada Bab 6.

4.5 Fungsi gelombang yang dapat diterima secara fisik

Tidak semua fungsi matematika dapat menjadi fungsi gelombang fisik. Jika ψ(x,t) ingin menggambarkan partikel, paling tidak ia harus memenuhi beberapa syarat dasar.

Pertama, fungsi gelombang harus dapat dinormalisasi. Artinya integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx$$

harus bernilai hingga. Fungsi dengan sifat ini disebut square-integrable, atau dalam bahasa Indonesia dapat disebut “kuadratnya dapat diintegralkan”.

Contoh fungsi yang dapat dinormalisasi adalah

$$\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2},$$

dengan $\alpha > 0$. Fungsi ini mengecil sangat cepat ketika $|x|$ membesar, sehingga integral $|\psi|^2$ di seluruh ruang bernilai hingga.

Sebaliknya, fungsi konstan di seluruh ruang,

$$\psi(x) = A,$$

tidak dapat dinormalisasi pada garis tak hingga jika A≠ 0, sebab

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \, dx = \infty.$$

Namun fungsi seperti gelombang bidang tetap sering dipakai sebagai idealisasi untuk partikel bebas. Dalam perlakuan yang lebih hati-hati, kita memakai paket gelombang yang dapat dinormalisasi atau normalisasi delta Dirac. Pembahasan lebih formal mengenai ruang keadaan dan normalisasi semacam ini akan muncul pada Bab 7.

Kedua, fungsi gelombang biasanya harus tunggal nilainya. Pada satu posisi dan waktu tertentu, ψ(x,t) tidak boleh mempunyai dua nilai berbeda. Jika tidak, prediksi probabilitas menjadi tidak jelas.

Ketiga, untuk banyak potensial yang tidak singular, fungsi gelombang dan turunannya harus kontinu. Syarat ini muncul dari persamaan Schrödinger dan menjadi penting saat kita menyambungkan solusi di batas dua daerah potensial, misalnya pada tangga potensial atau penghalang potensial di Bab 6. Pada potensial yang memiliki singularitas, syarat matematisnya perlu ditangani lebih hati-hati, sehingga pernyataan “turunannya selalu kontinu” tidak benar secara umum.

4.6 Probabilitas dalam tiga dimensi

Sejauh ini kita menulis fungsi gelombang satu dimensi:

$$\psi(x, t).$$

Untuk partikel dalam ruang tiga dimensi, fungsi gelombang bergantung pada tiga koordinat posisi:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(x, y, z, t).$$

Simbol r menyatakan vektor posisi:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}.$$

Interpretasi Born dalam tiga dimensi menjadi

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \, dV$$

adalah probabilitas menemukan partikel dalam elemen volume kecil dV di sekitar titik r. Dalam koordinat Kartesius,

$$dV = dx \, dy \, dz.$$

Syarat normalisasi tiga dimensi adalah

$$\int_{\text{seluruh ruang}} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \, dV = 1.$$

Contoh: jika partikel berada dalam kotak kubus dengan sisi L, dan rapat probabilitasnya seragam di dalam kotak, maka

$$|\psi|^2 = \frac{1}{L^3}$$

di dalam kotak dan nol di luar. Probabilitas menemukan partikel dalam setengah volume kotak adalah

(1) □ (2).

Pernyataan ini tampak sederhana, tetapi dalam sistem nyata seperti atom hidrogen, $|\psi(r)|^2$ memberi bentuk orbital, yaitu distribusi probabilitas posisi elektron di sekitar inti. Kita akan membahasnya secara rinci pada Bab 14.

4.7 Nilai harapan: rata-rata hasil banyak pengukuran

Dalam mekanika kuantum, satu pengukuran posisi pada satu partikel tidak selalu dapat diprediksi dengan pasti. Namun teori kuantum dapat memprediksi pola statistik dari banyak pengukuran identik.

Bayangkan kita menyiapkan banyak partikel dalam keadaan kuantum yang sama ψ(x). Kita ukur posisi partikel pertama, lalu partikel kedua, lalu partikel ketiga, dan seterusnya. Hasil tiap pengukuran dapat berbeda. Tetapi jika jumlah pengukuran sangat banyak, rata-ratanya mendekati nilai tertentu yang disebut nilai harapan.

Untuk posisi, nilai harapan ditulis

$$\langle x \rangle.$$

Definisinya adalah

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x,t)|^2 \, dx.$$

Notasi ⟨ x⟩ dibaca "nilai harapan x" atau "ekspektasi x".

Nilai harapan bukan selalu nilai yang paling mungkin, dan bukan berarti partikel pasti berada di sana. Ia adalah rata-rata statistik.

Contoh nilai harapan

Misalkan partikel berada dalam interval 0≤ x≤ L dengan rapat probabilitas seragam:

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{L}.$$

Maka

$$\langle x \rangle = \int_0^L x \frac{1}{L} \, dx = \frac{1}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{L}{2}.$$

Nilai harapan posisi adalah L/2, yaitu pusat interval. Ini sesuai intuisi: jika partikel sama mungkin ditemukan di semua titik antara 0 dan L, rata-rata posisinya berada di tengah.

Namun jika kita melakukan satu pengukuran, hasilnya bisa saja 0.1L, 0.7L, atau nilai lain dalam interval. Nilai L/2 adalah rata-rata dari banyak pengukuran, bukan kepastian hasil tunggal.

4.8 Operator dan nilai harapan secara awal

Bab 8 akan membahas operator dengan lebih lengkap. Namun untuk memahami nilai harapan momentum dan energi, kita perlu memperkenalkan gagasan dasarnya sekarang.

Dalam matematika, operator adalah aturan yang mengubah suatu fungsi menjadi fungsi lain. Contoh operator sederhana adalah turunan:

$$\frac{d}{dx}.$$

Jika operator ini bekerja pada fungsi f(x)=x², hasilnya adalah

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x.$$

Dalam mekanika kuantum, besaran fisik seperti posisi, momentum, dan energi diwakili oleh operator. Untuk posisi satu dimensi, operatornya sederhana:

$$\hat{x} = x.$$

Artinya, operator posisi bekerja dengan mengalikan fungsi gelombang dengan x.

Untuk momentum satu dimensi, operatornya adalah

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}.$$

Simbol topi pada hatx dan hatp menandakan bahwa besaran tersebut diperlakukan sebagai operator. Konstanta hbar adalah konstanta Planck tereduksi:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Nilai harapan momentum dihitung dengan

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x,t)\, dx.$$

Secara umum, jika suatu besaran fisik diwakili oleh operator hatA, nilai harapannya adalah

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \hat{A} \psi(x,t)\, dx.$$

Rumus ini adalah salah satu bentuk dasar hubungan antara fungsi gelombang dan prediksi eksperimen dalam mekanika kuantum (Griffiths & Schroeter, 2018; Sakurai & Napolitano, 2020).

4.9 Variansi dan ketidakpastian

Nilai harapan memberi rata-rata. Tetapi rata-rata saja tidak cukup. Dua distribusi probabilitas dapat memiliki rata-rata sama tetapi sebaran berbeda.

Contoh sederhana: dua kelompok nilai berikut sama-sama memiliki rata-rata 5:

$$4,\ 5,\ 6$$

dan

$$0,\ 5,\ 10.$$

Kelompok kedua jauh lebih tersebar. Untuk mengukur sebaran, kita memakai variansi dan simpangan baku.

Dalam mekanika kuantum, ketidakpastian posisi didefinisikan sebagai simpangan baku distribusi posisi:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}.$$

Di sini

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x,t)|^2 \, dx.$$

Demikian pula ketidakpastian momentum adalah

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}.$$

Kata ketidakpastian di sini tidak berarti alat ukur kita buruk. Ia adalah ukuran sebaran intrinsik hasil pengukuran untuk keadaan kuantum tertentu. Jika banyak partikel disiapkan dalam keadaan yang sama, lalu kita ukur posisinya, Δ x memberi ukuran seberapa menyebar hasil pengukuran posisi tersebut.

Contoh sebaran posisi

Jika fungsi gelombang sangat terkonsentrasi di sekitar x=0, maka Δ x kecil. Artinya hasil pengukuran posisi cenderung dekat dengan nol.

Jika fungsi gelombang menyebar luas, maka Δ x besar. Artinya hasil pengukuran posisi dapat muncul dalam rentang yang lebih lebar.

Tetapi dalam mekanika kuantum, membuat Δ x kecil biasanya membuat Δ p besar. Hubungan ini bukan sekadar keterbatasan teknik eksperimen. Ia merupakan bagian dari struktur matematika teori kuantum.

4.10 Prinsip ketidakpastian Heisenberg

Salah satu hasil paling terkenal dalam mekanika kuantum adalah prinsip ketidakpastian Heisenberg. Untuk posisi dan momentum satu dimensi, bentuknya adalah

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Artinya, tidak ada keadaan kuantum yang membuat ketidakpastian posisi dan ketidakpastian momentum keduanya nol. Semakin tajam posisi ditentukan, semakin besar sebaran momentum yang harus dimiliki keadaan itu, dan sebaliknya.

Heisenberg memperkenalkan gagasan ketidakpastian dalam makalah tahun 1927 mengenai isi kinematika dan mekanika kuantum (Heisenberg, 1927). Dalam formulasi modern, relasi ketidakpastian dapat diturunkan secara umum dari struktur ruang Hilbert dan komutator operator, yang akan kita bahas lebih sistematis pada Bab 9 (Shankar, 1994; Sakurai & Napolitano, 2020).

Penting untuk tidak menafsirkan prinsip ini secara terlalu kasar. Pernyataan yang benar bukan:

> "Kita mengganggu partikel saat mengukur, sehingga kita tidak tahu posisinya dan momentumnya."

Gangguan pengukuran memang dapat terjadi, tetapi relasi

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

lebih mendasar daripada gangguan alat ukur. Ia menyatakan bahwa tidak ada fungsi gelombang normal yang sekaligus memiliki posisi dan momentum dengan sebaran nol.

Ilustrasi dengan gelombang

Kita dapat memahami hal ini lewat gelombang. Gelombang sinus murni

$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

memiliki bilangan gelombang k yang pasti. Karena momentum berkaitan dengan bilangan gelombang melalui

$$p = \hbar k,$$

gelombang ini memiliki momentum tajam. Tetapi gelombang sinus murni menyebar di seluruh ruang, sehingga posisi partikel sangat tidak pasti.

Sebaliknya, untuk membuat paket gelombang yang terlokalisasi di sekitar suatu titik, kita harus menjumlahkan banyak gelombang dengan berbagai nilai k. Akibatnya, momentum menjadi menyebar.

Jadi relasi ketidakpastian bukan keanehan yang terpisah dari konsep gelombang. Ia berkaitan erat dengan fakta bahwa lokalisasi membutuhkan superposisi banyak komponen gelombang.

4.11 Konservasi probabilitas

Jika partikel tidak diciptakan atau dimusnahkan dalam sistem yang kita bahas, total probabilitas harus tetap satu. Jika pada waktu awal

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)|^2 \, dx = 1,$$

maka pada waktu berikutnya harus tetap

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1.$$

Persamaan Schrödinger memang memiliki sifat ini untuk Hamiltonian Hermitian, yaitu operator energi yang memenuhi syarat matematis tertentu agar nilai energi yang terukur bernilai nyata dan evolusi probabilitas terjaga. Istilah Hermitian akan dibahas lebih lengkap pada Bab 8.

Untuk melihat bagaimana probabilitas “bergerak”, kita memperkenalkan arus probabilitas.

4.12 Arus probabilitas

Dalam fluida, massa dapat mengalir dari satu daerah ke daerah lain. Jika massa dalam suatu daerah berkurang, biasanya ada aliran massa keluar dari daerah tersebut.

Dalam mekanika kuantum, probabilitas juga dapat “mengalir”. Jika peluang menemukan partikel di suatu daerah berkurang, peluang itu tidak hilang begitu saja; ia berpindah ke daerah lain. Besaran yang menggambarkan aliran ini disebut arus probabilitas.

Untuk partikel satu dimensi dengan potensial nyata, rapat probabilitas adalah

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2,$$

dan arus probabilitas adalah

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right).$$

Bentuk ekuivalennya adalah

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\right),$$

dengan Im berarti bagian imajiner.

Rapat probabilitas dan arus probabilitas memenuhi persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0.$$

Persamaan ini menyatakan konservasi lokal probabilitas. Kata “lokal” berarti berlaku titik demi titik, bukan hanya setelah diintegralkan di seluruh ruang.

Interpretasinya: jika rapat probabilitas di suatu daerah berubah, perubahan itu disebabkan oleh arus probabilitas yang masuk atau keluar.

Contoh: gelombang bidang

Ambil gelombang bidang

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}.$$

Rapat probabilitasnya adalah

$$\rho = |\psi|^2 = |A|^2.$$

Nilai ini konstan terhadap x. Sekarang hitung arusnya. Turunan terhadap x adalah

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik\psi.$$

Maka

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} = ik|\psi|^2.$$

Bagian imajinernya adalah

$$\mathrm{Im}(ik|\psi|^2) = k|\psi|^2.$$

Jadi

$$j = \frac{\hbar k}{m}|\psi|^2.$$

Karena hbar k=p, maka

$$j = \frac{p}{m}|\psi|^2 = v|\psi|^2.$$

Ini mirip dengan arus klasik: rapat dikali kecepatan. Tetapi yang mengalir di sini bukan massa atau muatan secara langsung, melainkan probabilitas.

4.13 Fase fungsi gelombang

Karena ψ kompleks, ia memiliki fase. Untuk bilangan kompleks, kita dapat menulis

$$\psi = Re^{i\theta},$$

dengan R≥ 0 dan θ adalah fase. Modulus kuadratnya adalah

$$|\psi|^2 = R^2.$$

Jika seluruh fungsi gelombang dikalikan dengan faktor fase global

$$e^{i\alpha},$$

maka fungsi gelombang baru adalah

$$\psi'(x,t) = e^{i\alpha}\psi(x,t).$$

Rapat probabilitasnya menjadi

$$|\psi'(x,t)|^2 = |e^{i\alpha}\psi(x,t)|^2 = |\psi(x,t)|^2.$$

Jadi fase global tidak mengubah probabilitas posisi.

Namun ini tidak berarti fase selalu tidak penting. Perbedaan fase antara dua bagian fungsi gelombang dapat menghasilkan interferensi. Contohnya, jika dua amplitudo probabilitas bertemu, probabilitas total tidak selalu sama dengan jumlah probabilitas masing-masing. Yang dijumlahkan adalah amplitudonya dahulu, baru diambil modulus kuadratnya.

Misalkan dua amplitudo adalah

$$\psi_1 = A$$

dan

$$\psi_2 = A.$$

Amplitudo totalnya

$$\psi_{\text{total}} = 2A,$$

sehingga probabilitasnya sebanding dengan

$$|2A|^2 = 4|A|^2.$$

Tetapi jika amplitudo kedua berbeda fase sebesar π,

$$\psi_2 = -A,$$

maka

$$\psi_{\text{total}} = A - A = 0,$$

dan probabilitasnya nol. Inilah inti interferensi kuantum.

Interferensi seperti ini menjelaskan mengapa elektron dapat menghasilkan pola difraksi, sebagaimana telah kita bahas pada Bab 2.

4.14 Superposisi dan makna probabilitas

Salah satu ciri paling dasar mekanika kuantum adalah superposisi. Secara sederhana, superposisi berarti jika ψ_1 dan ψ_2 adalah dua solusi persamaan Schrödinger untuk sistem linear yang sama, maka kombinasi

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

juga dapat menjadi keadaan yang mungkin, dengan c_1 dan c_2 bilangan kompleks.

Superposisi bukan berarti partikel “secara klasik berada di dua tempat sekaligus” dalam pengertian sederhana. Pernyataan seperti itu sering menyesatkan. Yang benar adalah: keadaan kuantum dapat memiliki amplitudo untuk beberapa hasil pengukuran yang berbeda. Ketika pengukuran dilakukan, hasil tertentu muncul dengan probabilitas yang ditentukan oleh amplitudo tersebut.

Contoh sederhana: misalkan suatu partikel dapat berada dalam dua keadaan terpisah, φ_1 dan φ_2, yang saling ortogonal. Keadaan

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2$$

memberikan probabilitas

$$\frac{1}{2}$$

untuk hasil yang berkaitan dengan φ_1, dan

$$\frac{1}{2}$$

untuk hasil yang berkaitan dengan φ_2, jika pengukuran dilakukan dalam basis tersebut. Konsep basis, ortogonalitas, dan ruang Hilbert akan dibahas dengan teliti pada Bab 7.

4.15 Deterministik atau probabilistik?

Sekarang kita dapat membedakan dua jenis prediksi dalam mekanika kuantum.

Pertama, evolusi fungsi gelombang menurut persamaan Schrödinger bersifat deterministik. Jika kita mengetahui $\psi(x,0)$ dan Hamiltonian sistem, maka persamaan Schrödinger menentukan $\psi(x,t)$ pada waktu berikutnya.

Kedua, hasil pengukuran individual bersifat probabilistik. Dari $\psi(x,t)$, kita menghitung peluang berbagai hasil, tetapi biasanya tidak dapat memprediksi satu hasil tunggal dengan pasti.

Jadi mekanika kuantum bukan teori yang “semuanya acak”. Ada struktur deterministik yang kuat dalam evolusi fungsi gelombang. Tetapi hubungan antara fungsi gelombang dan hasil pengukuran bersifat probabilistik.

Perbandingan dengan mekanika klasik dapat diringkas sebagai berikut.

Dalam mekanika klasik:

$$\text{keadaan awal} \longrightarrow \text{lintasan pasti.}$$

Dalam mekanika kuantum:

$$\text{fungsi gelombang awal} \longrightarrow \text{fungsi gelombang pada waktu berikutnya} \longrightarrow \text{probal}$$

Perbedaan ini adalah salah satu perubahan konseptual terbesar dalam fisika abad ke-20.

4.16 Pengukuran dan perubahan keadaan secara awal

Pengukuran dalam mekanika kuantum memiliki peran khusus. Jika kita mengukur posisi dan memperoleh hasil bahwa partikel berada dalam suatu daerah kecil, maka setelah pengukuran keadaan partikel tidak lagi sama seperti sebelumnya. Fungsi gelombang menjadi lebih terlokalisasi di sekitar daerah hasil pengukuran.

Dalam formulasi standar mekanika kuantum, pengukuran ideal dikaitkan dengan proyeksi keadaan ke keadaan yang sesuai dengan hasil ukur. Pembahasan matematis lengkapnya memerlukan konsep ruang Hilbert, operator Hermitian, eigenstate, dan proyektor, sehingga akan ditunda hingga Bab 7 dan Bab 8. Untuk saat ini, cukup pahami gagasan berikut:

> Fungsi gelombang memberi probabilitas hasil pengukuran, dan hasil pengukuran dapat mengubah fungsi gelombang yang dipakai untuk prediksi berikutnya.

Contoh: sebelum pengukuran, fungsi gelombang partikel mungkin menyebar lebar. Setelah kita mengukur posisinya dan menemukan partikel dekat x=a, prediksi posisi untuk pengukuran segera berikutnya akan lebih terkonsentrasi di sekitar a. Tetapi karena ketidakpastian posisi-momentum, keadaan yang lebih terlokalisasi biasanya memiliki sebaran momentum yang lebih besar.

4.17 Satu contoh lengkap: partikel dalam kotak sederhana

Mari kita gabungkan beberapa gagasan dalam satu contoh.

Misalkan sebuah partikel berada dalam kotak satu dimensi antara 0 dan L, dengan fungsi gelombang

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & 0 \le x \le L, \\ 0, & \text{di luar.} \end{cases}$$

Fungsi ini sudah ternormalisasi.

Rapat probabilitasnya adalah

$$|\psi(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Probabilitas menemukan partikel antara 0 dan L/2 adalah

$$P\left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right) = \int_0^{L/2} \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx.$$

Karena fungsi $\sin^2(\pi x/L)$ simetris terhadap x=L/2, probabilitas di kiri dan kanan sama. Maka

$$P\left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Nilai harapan posisi juga berada di tengah:

$$\langle x \rangle = \frac{L}{2}.$$

Namun rapat probabilitasnya tidak seragam. Di x=0 dan x=L,

$$|\psi(x)|^2 = 0.$$

Di tengah kotak, x=L/2,

$$|\psi(L/2)|^2 = \frac{2}{L}.$$

Jadi partikel paling mungkin ditemukan di sekitar tengah kotak, tetapi nilai harapannya L/2 bukan karena distribusinya seragam, melainkan karena distribusinya simetris.

Contoh ini memperlihatkan tiga hal sekaligus:

1. fungsi gelombang dapat bernilai positif, negatif, atau kompleks, tetapi probabilitas berasal dari $|\psi|^2$;
2. normalisasi memastikan total peluang sama dengan satu;
3. nilai harapan adalah rata-rata statistik, bukan hasil pasti satu pengukuran.

4.18 Apa yang harus diingat dari bab ini?

Fungsi gelombang adalah pusat mekanika kuantum. Ia bukan lintasan partikel, dan bukan gelombang materi dalam arti klasik seperti gelombang air. Dalam formulasi standar, fungsi gelombang adalah amplitudo probabilitas.

Makna fisiknya diberikan oleh aturan Born:

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2.$$

Dari rapat probabilitas ini kita menghitung peluang menemukan partikel dalam suatu interval:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b |\psi(x,t)|^2 \, dx.$$

Agar fungsi gelombang menggambarkan satu partikel yang pasti berada di suatu tempat, ia harus ternormalisasi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 1.$$

Nilai harapan suatu besaran adalah rata-rata statistik dari banyak pengukuran pada sistem yang disiapkan identik. Untuk posisi,

$$\langle x \rangle = \int x |\psi(x,t)|^2 \, dx.$$

Ketidakpastian adalah simpangan baku hasil pengukuran, bukan sekadar akibat alat ukur yang buruk. Untuk posisi dan momentum,

$$\Delta x \, \Delta p \ge \frac{\hbar}{2}.$$

Probabilitas juga memenuhi hukum konservasi melalui persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0.$$

Akhirnya, mekanika kuantum memiliki dua wajah. Evolusi fungsi gelombang menurut persamaan Schrödinger bersifat deterministik, tetapi hasil pengukuran individual umumnya bersifat probabilistik. Perpaduan inilah yang membuat teori kuantum berbeda tajam dari mekanika klasik, sekaligus sangat berhasil menjelaskan dunia mikroskopik.

Pada bab berikutnya kita akan mulai memakai persamaan Schrödinger secara langsung untuk sistem satu dimensi. Kita akan melihat bagaimana fungsi gelombang, syarat batas, Hamiltonian, dan energi terkuantisasi bekerja bersama dalam contoh-contoh konkret.

References

Born, M. (1926). Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. Zeitschrift für Physik, 37, 863–867.

Griffiths, D. J., & Schroeter, D. F. (2018). Introduction to Quantum Mechanics (3rd ed.). Cambridge University Press.

Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. Zeitschrift für Physik, 43, 172–198.

Sakurai, J. J., & Napolitano, J. (2020). Modern Quantum Mechanics (3rd ed.). Cambridge University Press.

Shankar, R. (1994). Principles of Quantum Mechanics (2nd ed.). Plenum Press.

Document information

Bab 4: Fungsi Gelombang dan Interpretasi Probabilistik

Project	Mekanika Kuantum
Document	Document 1.8
Author	terry.mart
Verifier	Not verified
Downloaded	July 06, 2026 00:21 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/mekanika-kuantum/documents/bab-4-fungsi-gelombang-dan-interpretasi-probabilistik/