Bab 3: Dari Tantangan Debye ke Persamaan Schrödinger

Pada bab sebelumnya kita melihat gagasan de Broglie: jika cahaya, yang dahulu dianggap gelombang, dapat berperilaku seperti partikel, maka mungkin materi, yang dahulu dianggap partikel, juga dapat berperilaku seperti gelombang. Gagasan ini terdengar sederhana, tetapi akibatnya sangat besar. Jika elektron mempunyai panjang gelombang, maka elektron tidak cukup lagi dipahami sebagai titik kecil yang bergerak di lintasan tajam seperti planet mengitari Matahari.

Pertanyaan berikutnya muncul secara alami:

> Jika elektron adalah gelombang, persamaan gelombang apa yang harus dipatuhinya?

Pertanyaan inilah yang membawa kita menuju persamaan Schrödinger.

Bab ini tidak akan langsung memakai persamaan Schrödinger sebagai rumus jadi. Kita akan membangunnya secara bertahap dari beberapa ide sederhana: hubungan energi dan momentum, gelombang materi de Broglie, gelombang kompleks, dan kebutuhan akan persamaan diferensial yang mengatur evolusi fungsi gelombang. Di akhir bab, persamaan Schrödinger akan tampak bukan sebagai tebakan ajaib, melainkan sebagai bentuk matematis yang wajar untuk gelombang materi nonrelativistik.

3.1 Dari “elektron sebagai gelombang” ke kebutuhan persamaan gelombang

Dalam fisika klasik, sebuah sistem biasanya dijelaskan oleh besaran yang berubah terhadap waktu. Untuk partikel, kita menyebut posisi sebagai fungsi waktu:

$$x(t).$$

Misalnya, jika sebuah benda bergerak lurus dengan kecepatan tetap v, posisinya dapat ditulis

$$x(t) = x_0 + vt.$$

Simbol x_0 adalah posisi awal, dan v adalah kecepatan. Gambaran ini sangat klasik: partikel memiliki posisi tertentu pada setiap saat.

Untuk gelombang, yang menjadi pusat perhatian bukan posisi satu titik partikel, melainkan suatu besaran yang tersebar dalam ruang dan berubah terhadap waktu. Misalnya, simpangan tali dapat ditulis

$$y(x,t).$$

Artinya: pada posisi x dan waktu t, tali memiliki simpangan y. Gelombang tidak tinggal di satu titik; ia memiliki pola ruang.

Jika elektron benar-benar memiliki sifat gelombang, maka keadaan elektron seharusnya tidak cukup ditulis sebagai x(t). Kita memerlukan suatu fungsi yang bergantung pada ruang dan waktu. Dalam mekanika kuantum fungsi ini disebut fungsi gelombang, biasanya ditulis

$$\psi(x,t).$$

Huruf Yunani ψ, dibaca "psi", akan sering muncul dalam buku ini. Untuk sementara, anggap ψ(x,t) sebagai besaran matematika yang menggambarkan keadaan gelombang suatu partikel. Makna probabilistiknya akan dibahas lebih hati-hati pada Bab 4.

Sekarang pertanyaannya menjadi lebih tajam:

> Persamaan apa yang menentukan perubahan ψ(x,t) terhadap ruang dan waktu?

Untuk gelombang pada tali, kita punya persamaan gelombang klasik. Untuk gelombang elektromagnetik, kita punya persamaan Maxwell. Untuk gelombang materi, Schrödinger mencari persamaan baru.

Secara historis, dorongan ini sering dikaitkan dengan percakapan antara Peter Debye dan Erwin Schrödinger di Zürich. Menurut rekonstruksi historis Walter Moore, setelah Schrödinger membahas gagasan de Broglie dalam sebuah seminar, Debye menekankan bahwa jika seseorang berbicara tentang gelombang, semestinya ada persamaan gelombangnya; dorongan semacam inilah yang membantu mengarahkan Schrödinger kepada pencarian persamaan yang kini menyandang namanya (Moore, 1989). Detail anekdot historis seperti ini tidak perlu dianggap sebagai satu-satunya sebab lahirnya persamaan Schrödinger, tetapi ia menangkap inti masalah fisik saat itu: gagasan gelombang materi membutuhkan hukum dinamika.

3.2 Energi dan momentum dalam mekanika klasik

Sebelum membangun persamaan gelombang, kita perlu mengingat dua besaran dasar: energi dan momentum.

Momentum adalah ukuran “kuantitas gerak”. Untuk partikel bermassa m yang bergerak dengan kecepatan v, momentum klasiknya adalah

$$p = mv.$$

Jika sebuah bola berat dan sebuah bola ringan bergerak dengan kecepatan sama, bola berat memiliki momentum lebih besar. Jika dua bola bermassa sama bergerak dengan kecepatan berbeda, bola yang lebih cepat memiliki momentum lebih besar.

Energi kinetik adalah energi karena gerak. Dalam mekanika Newton nonrelativistik,

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Karena p=mv, kita dapat menulis energi kinetik dalam bentuk momentum:

$$K = \frac{p^2}{2m}.$$

Jika partikel juga berada dalam medan gaya yang dapat dijelaskan oleh energi potensial V(x), maka energi totalnya adalah

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Persamaan ini sangat penting. Ia mengatakan bahwa energi total partikel terdiri dari energi gerak dan energi karena posisi. Contoh sederhana: untuk benda dekat permukaan Bumi, energi potensial gravitasi kira-kira

$$V(z) = mgz,$$

dengan z ketinggian. Untuk pegas ideal,

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2,$$

dengan k konstanta pegas.

Dalam mekanika klasik, persamaan

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

adalah pernyataan tentang partikel. Schrödinger akan mengubahnya menjadi persamaan tentang gelombang.

3.3 Gelombang sederhana: panjang gelombang, frekuensi, dan fase

Sebelum masuk ke gelombang materi, kita perlu menyusun bahasa gelombang.

Gelombang sinusoidal satu dimensi dapat ditulis

$$A\cos(kx - \omega t).$$

Di sini:

- A adalah amplitudo, yaitu besar maksimum gelombang.
- k adalah bilangan gelombang, yang berhubungan dengan panjang gelombang.
- ω adalah frekuensi sudut, yang berhubungan dengan frekuensi biasa.
- Bagian kx-ω t disebut fase.

Panjang gelombang λ adalah jarak ruang setelah pola gelombang berulang. Hubungannya dengan k adalah

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Frekuensi biasa f adalah banyaknya osilasi per detik. Hubungannya dengan frekuensi sudut ω adalah

$$\omega = 2\pi f.$$

Contoh: jika gelombang air memiliki panjang gelombang 2 m, maka

$$k = \frac{2\pi}{2\,\mathrm{m}} = \pi\,\mathrm{m}^{-1}.$$

Jika gelombang berosilasi 5 kali per detik, maka

$$\omega = 2\pi(5\,\mathrm{s}^{-1}) = 10\pi\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Gelombang sinusoidal seperti ini menyebar tanpa berubah bentuk jika hubungan antara ω dan k sesuai dengan medium atau sistemnya. Hubungan ω(k) disebut relasi dispersi. Istilah "dispersi" berarti bahwa komponen gelombang dengan k berbeda dapat merambat dengan kecepatan berbeda.

Untuk gelombang cahaya dalam vakum,

$$\omega = ck,$$

dengan c kecepatan cahaya. Untuk gelombang materi nonrelativistik, relasinya akan berbeda.

3.4 Relasi Planck-Einstein dan de Broglie

Dua hubungan kuantum yang menjadi jembatan antara partikel dan gelombang adalah

$$E = \hbar\omega$$

dan

$$p = \hbar k.$$

Simbol hbar, dibaca "h-bar", adalah konstanta Planck tereduksi:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Hubungan pertama menyatakan bahwa energi berkaitan dengan frekuensi sudut. Hubungan kedua menyatakan bahwa momentum berkaitan dengan bilangan gelombang. Gagasan de Broglie adalah memperluas hubungan gelombang-partikel ini dari cahaya ke materi; dalam disertasinya, de Broglie mengusulkan bahwa partikel materi memiliki panjang gelombang

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

(de Broglie, 1925).

Karena k=2π/λ, hubungan λ=h/p setara dengan

$$p = \hbar k.$$

Mari kita lihat contoh numerik sederhana.

Misalkan sebuah elektron memiliki momentum

$$p = 1.0 \times 10^{-24}\,\mathrm{kg\ m/s}.$$

Dengan

$$h \approx 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\ s},$$

panjang gelombang de Broglie-nya adalah

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1.0 \times 10^{-24}}\,\mathrm{m} = 6.63 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}.$$

Ini sekitar 0.66 nm, ukuran yang sebanding dengan jarak antaratom dalam padatan. Karena itu, elektron dengan momentum seperti ini dapat menunjukkan difraksi oleh kisi kristal. Inilah salah satu alasan mengapa hipotesis de Broglie menjadi sangat penting secara fisik: panjang gelombang elektron dapat berada pada skala struktur atom.

3.5 Gelombang materi bebas dan relasi dispersi kuantum

Sekarang kita gabungkan energi klasik nonrelativistik dengan hubungan de Broglie.

Untuk partikel bebas, energi potensialnya nol:

$$V = 0.$$

Maka energi totalnya hanya energi kinetik:

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Dengan hubungan kuantum

$$E = \hbar\omega$$

dan

$$p = \hbar k,$$

kita peroleh

$$\hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m}.$$

Maka

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}.$$

Inilah relasi dispersi untuk gelombang materi bebas nonrelativistik.

Perhatikan bedanya dengan cahaya dalam vakum. Untuk cahaya,

$$\omega = ck,$$

linear terhadap k. Untuk partikel materi nonrelativistik,

$$\omega \propto k^2.$$

Akibatnya, paket gelombang materi cenderung menyebar seiring waktu. Paket gelombang adalah gabungan banyak gelombang sinusoidal dengan nilai k berbeda. Karena masing-masing komponen dapat memiliki kecepatan fase berbeda, bentuk paket dapat berubah.

Ini penting secara konseptual. Jika elektron digambarkan oleh gelombang, gelombangnya tidak harus seperti gelombang air sederhana yang selalu mempertahankan bentuk. Gelombang materi memiliki dinamika sendiri.

3.6 Mengapa memakai gelombang kompleks?

Dalam mekanika kuantum, gelombang sering ditulis bukan sebagai kosinus biasa, melainkan sebagai eksponensial kompleks:

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}.$$

Di sini i adalah bilangan imajiner yang memenuhi

$$i^2 = -1.$$

Mengapa memakai bilangan kompleks?

Alasan pertama bersifat praktis. Berdasarkan rumus Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Jadi eksponensial kompleks memuat kosinus dan sinus sekaligus. Banyak perhitungan gelombang menjadi jauh lebih ringkas jika kita memakai bentuk $e^{(i\theta)}$.

Alasan kedua lebih mendalam. Persamaan Schrödinger yang berhasil menggambarkan eksperimen bersifat orde satu terhadap waktu dan mengandung faktor i. Artinya, fungsi gelombang kuantum secara alami adalah fungsi kompleks, bukan sekadar fungsi real. Dalam teori kuantum modern, yang memiliki makna langsung bukan ψ sendiri, melainkan kombinasi seperti

$$|\psi|^2 = \psi^*\psi,$$

dengan ψ^ adalah kompleks konjugat dari ψ. Jika

$$\psi = a + ib,$$

maka

$$\psi^* = a - ib,$$

dan

$$|\psi|^2 = a^2 + b^2.$$

Nilai $|\psi|^2$ selalu real dan tidak negatif. Ini membuatnya cocok sebagai rapat probabilitas, sebagaimana akan kita bahas pada Bab 4. Interpretasi probabilistik ini menjadi jelas setelah karya Max Born tentang hamburan kuantum pada tahun 1926 (Born, 1926).

Untuk saat ini, cukup ingat dua hal:

1. ψ boleh kompleks.
2. Besaran yang kelak berhubungan dengan probabilitas adalah $|\psi|^2$, bukan ψ langsung.

Contoh sederhana: jika

$$\psi = 3 + 4i,$$

maka

$$|\psi|^2 = (3 - 4i)(3 + 4i) = 9 + 16 = 25.$$

Walaupun ψ kompleks, $|\psi|^2$ adalah bilangan real.

3.7 Dari energi-momentum ke operator

Kita sekarang memasuki langkah matematis kunci.

Ambil gelombang bidang satu dimensi:

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}.$$

Gelombang bidang adalah gelombang dengan panjang gelombang dan frekuensi tunggal. Ia menyebar di seluruh ruang, sehingga bukan gambaran partikel yang terlokalisasi, tetapi sangat berguna sebagai blok penyusun.

Mari kita turunkan ψ terhadap waktu:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi.$$

Kalikan kedua sisi dengan ihbar:

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hbar\omega\psi.$$

Karena

$$E = \hbar\omega,$$

maka

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi.$$

Ini menyarankan bahwa energi dapat diwakili oleh operasi matematis

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}.$$

Sekarang turunkan ψ terhadap posisi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik\psi.$$

Kalikan dengan -ihbar:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} = \hbar k\psi.$$

Karena

$$p = \hbar k,$$

maka

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} = p\psi.$$

Ini menyarankan bahwa momentum dapat diwakili oleh operasi

$$p \longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}.$$

Dalam mekanika kuantum, operasi matematis seperti ini disebut operator. Operator adalah aturan yang mengubah suatu fungsi menjadi fungsi lain. Misalnya, operator turunan

$$\frac{d}{dx}$$

mengubah fungsi x^2 menjadi 2x. Operator perkalian oleh x mengubah fungsi f(x) menjadi xf(x).

Jadi, saat kita menulis

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x},$$

kita mengatakan bahwa momentum dalam representasi posisi dinyatakan sebagai operator turunan. Tanda topi pada hat p mengingatkan bahwa ini operator, bukan sekadar bilangan.

Untuk tiga dimensi, momentum menjadi

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla,$$

dengan

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Simbol ∇, dibaca "nabla", adalah operator gradien. Pada tahap ini, cukup pahami bahwa ia mengumpulkan turunan terhadap tiga koordinat ruang.

Langkah ini sering ditulis ringkas sebagai aturan korespondensi:

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} \to -i\hbar\nabla.$$

Aturan ini bukan pembuktian dari prinsip yang lebih dalam di sini. Ia adalah jembatan yang masuk akal antara gelombang bidang de Broglie dan persamaan dinamika kuantum. Dalam buku teks modern, persamaan Schrödinger biasanya diperkenalkan melalui hubungan energi-momentum nonrelativistik bersama substitusi operator energi dan momentum seperti ini (Griffiths & Schroeter, 2018).

3.8 Persamaan Schrödinger untuk partikel bebas

Kita mulai dari energi klasik partikel bebas:

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Sekarang ubah energi dan momentum menjadi operator yang bekerja pada fungsi gelombang.

Energi:

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}.$$

Momentum satu dimensi:

$$p \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}.$$

Karena energi melibatkan p^2, kita perlu menghitung operator p^2:

$$\hat{p}^2 = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2.$$

Karena (-i)²=-1, maka

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Maka persamaan energi menjadi

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Inilah persamaan Schrödinger bergantung waktu untuk partikel bebas satu dimensi.

Dalam tiga dimensi, turunan kedua terhadap ruang diganti oleh operator Laplace

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Maka persamaan partikel bebas tiga dimensi adalah

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi.$$

Operator ∇^2 disebut Laplacian. Ia mengukur bagaimana suatu fungsi melengkung atau berubah di sekitar suatu titik. Dalam satu dimensi, Laplacian hanyalah turunan kedua terhadap x.

Mari kita uji apakah gelombang bidang memang memenuhi persamaan partikel bebas.

Ambil

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}.$$

Turunan waktunya:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi.$$

Maka sisi kiri persamaan Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\hbar(-i\omega)\psi = \hbar\omega\psi.$$

Turunan ruang kedua:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2\psi.$$

Maka sisi kanan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2\psi) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi.$$

Agar kedua sisi sama, harus berlaku

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

atau

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}.$$

Ini persis relasi dispersi gelombang materi bebas yang kita peroleh sebelumnya. Jadi persamaan Schrödinger partikel bebas memang cocok dengan hubungan de Broglie dan energi kinetik klasik nonrelativistik.

3.9 Menambahkan potensial

Dalam banyak sistem fisika, partikel tidak bebas. Elektron dalam atom tertarik oleh inti. Partikel dalam pegas mengalami gaya pemulih. Elektron dalam logam merasakan pengaruh atom-atom kisi.

Secara klasik, energi total partikel dalam potensial V(x,t) adalah

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x,t).$$

Jika kita menerapkan aturan operator, kita memperoleh

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi.$$

Ini adalah persamaan Schrödinger bergantung waktu satu dimensi:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\psi(x,t)}$$

Untuk tiga dimensi:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)}$$

Inilah salah satu bentuk paling penting dalam seluruh mekanika kuantum. Schrödinger menerbitkan bentuk dasar teori gelombangnya dalam rangkaian makalah tahun 1926, termasuk makalah awal "Quantisierung als Eigenwertproblem" yang memperkenalkan metode nilai eigen untuk masalah kuantum (Schrödinger, 1926).

Bagian

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

berhubungan dengan energi kinetik. Bagian

$$V(\mathbf{r},t)$$

berhubungan dengan energi potensial. Gabungannya disebut operator Hamiltonian, ditulis

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}, t).$$

Maka persamaan Schrödinger dapat ditulis ringkas sebagai

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi.$$

Hamiltonian adalah operator energi total. Dalam mekanika klasik, Hamiltonian sering berarti fungsi energi total yang ditulis dalam posisi dan momentum. Dalam mekanika kuantum, Hamiltonian menjadi operator yang bekerja pada fungsi gelombang.

Contoh sederhana: jika partikel berada dalam potensial konstan V_0, maka

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0.$$

Gelombang bidang masih dapat menjadi solusi, tetapi energinya bergeser:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0.$$

Secara fisik, potensial konstan hanya menambahkan nilai energi yang sama di semua tempat. Gaya muncul dari perubahan potensial terhadap posisi, bukan dari nilai absolut potensial. Dalam satu dimensi, gaya klasik terkait dengan potensial melalui

$$F = -\frac{dV}{dx}.$$

Jika V konstan, turunannya nol, maka gaya nol.

3.10 Mengapa persamaan ini tidak seperti persamaan gelombang klasik?

Persamaan gelombang klasik pada tali biasanya berbentuk

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Persamaan ini memiliki turunan kedua terhadap waktu. Sebaliknya, persamaan Schrödinger memiliki turunan pertama terhadap waktu:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi.$$

Ini bukan kebetulan kecil. Karena persamaan Schrödinger orde satu terhadap waktu, jika kita mengetahui ψ(x,0) pada waktu awal, persamaan ini menentukan ψ(x,t) untuk waktu berikutnya, selama Hamiltonian diketahui dan kondisi matematisnya baik. Dalam hal ini, evolusi fungsi gelombang bersifat deterministik.

Namun hasil pengukuran dalam mekanika kuantum tidak deterministik dengan cara klasik. Fungsi gelombang berevolusi secara deterministik, tetapi hasil pengukuran individual biasanya hanya dapat diprediksi secara probabilistik. Perbedaan penting ini akan menjadi pusat Bab 4 dan Bab 8.

Ada hal lain yang juga penting: adanya faktor i. Faktor ini membuat evolusi waktu dalam mekanika kuantum menyerupai rotasi fase dalam ruang kompleks. Secara matematis, faktor i membantu menjaga normalisasi fungsi gelombang, yaitu total probabilitas tetap satu, jika Hamiltonian memiliki sifat Hermitian yang sesuai. Kita belum perlu membahas Hermitian secara mendalam sekarang; konsep itu akan dibahas pada Bab 8. Untuk saat ini, cukup ingat bahwa struktur kompleks persamaan Schrödinger bukan hiasan matematis, melainkan bagian dari cara teori menjaga konsistensi probabilitas.

3.11 Keadaan stasioner dan persamaan Schrödinger tak bergantung waktu

Banyak masalah penting memiliki potensial yang tidak berubah terhadap waktu:

$$V(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r}).$$

Dalam kasus seperti ini, kita dapat mencari solusi dengan bentuk terpisah:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})T(t).$$

Ini disebut pemisahan variabel. Idenya sederhana: kita mencoba menulis fungsi ruang-waktu sebagai perkalian fungsi ruang dan fungsi waktu. Tidak semua solusi harus berbentuk seperti ini, tetapi banyak solusi dasar dapat ditemukan dengan cara ini.

Masukkan ke persamaan Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[\phi(\mathbf{r})T(t)] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right]\phi(\mathbf{r})T(t).$$

Karena φ tidak bergantung pada waktu,

$$i\hbar\phi(\mathbf{r})\frac{dT}{dt} = T(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\right].$$

Bagi kedua sisi dengan φ(mathbf r)T(t):

$$i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\phi}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + V\phi\right].$$

Sisi kiri hanya bergantung pada t. Sisi kanan hanya bergantung pada mathbf r. Agar keduanya sama untuk semua mathbf r dan t, keduanya harus sama dengan suatu konstanta. Konstanta itu kita sebut E, energi.

Maka bagian waktu memenuhi

$$i\hbar\frac{dT}{dt} = ET.$$

Solusinya adalah

$$T(t) = e^{-iEt/\hbar}.$$

Bagian ruang memenuhi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r}).$$

Atau, dengan Hamiltonian,

$$\boxed{\hat{H}\phi = E\phi}$$

Inilah persamaan Schrödinger tak bergantung waktu.

Persamaan ini berbentuk persamaan nilai eigen. Istilah "eigen" berasal dari bahasa Jerman yang berarti "khas" atau "karakteristik". Jika suatu operator hat A bekerja pada fungsi f dan hasilnya hanya mengalikan fungsi itu dengan bilangan a,

$$\hat{A}f = af,$$

maka f disebut fungsi eigen dari hat A, dan a disebut nilai eigen.

Contoh sederhana dari kalkulus:

$$\frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}.$$

Di sini e^{3x} adalah fungsi eigen dari operator turunan d/dx, dengan nilai eigen 3.

Dalam mekanika kuantum, jika

$$\hat{H}\phi = E\phi,$$

maka φ adalah keadaan dengan energi tertentu E. Solusi lengkapnya adalah

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}.$$

Keadaan seperti ini disebut keadaan stasioner. Kata "stasioner" tidak berarti fungsi gelombangnya sama sekali tidak berubah terhadap waktu. Faktor fase

$$e^{-iEt/\hbar}$$

tetap berubah. Namun rapat probabilitasnya tidak berubah, karena

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\phi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}|^2 = |\phi(\mathbf{r})|^2|e^{-iEt/\hbar}|^2.$$

Untuk eksponensial fase kompleks,

$$|e^{-iEt/\hbar}|^2 = 1.$$

Jadi

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\phi(\mathbf{r})|^2.$$

Itulah sebabnya keadaan ini disebut stasioner: distribusi probabilitasnya tetap.

3.12 Contoh: partikel bebas sebagai keadaan energi tertentu

Untuk partikel bebas satu dimensi,

$$V = 0,$$

persamaan Schrödinger tak bergantung waktu menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} = E\phi.$$

Kita coba solusi

$$\phi(x) = Ae^{ikx}.$$

Turunan keduanya adalah

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -k^2\phi.$$

Masukkan ke persamaan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2\phi) = E\phi.$$

Maka

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Karena

$$p = \hbar k,$$

kita dapat menulis

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Jadi untuk partikel bebas, persamaan Schrödinger mengembalikan hubungan energi-momentum klasik nonrelativistik, tetapi dengan cara gelombang.

Namun ada peringatan penting. Fungsi

$$e^{ikx}$$

tersebar di seluruh ruang. Nilai $|e^{ikx}|^2=1$ di mana-mana. Artinya, gelombang bidang tidak menggambarkan partikel yang terlokalisasi di satu daerah kecil. Untuk menggambarkan partikel yang lebih terlokalisasi, kita perlu membentuk paket gelombang dari superposisi banyak nilai k. Konsep superposisi ini akan terus muncul di seluruh mekanika kuantum.

3.13 Superposisi: menjumlahkan kemungkinan gelombang

Salah satu sifat dasar persamaan Schrödinger adalah linearitas. Sebuah persamaan disebut linear jika jumlah dua solusi juga merupakan solusi, selama sistemnya sama.

Misalnya, jika ψ_1 dan ψ_2 memenuhi persamaan Schrödinger yang sama, maka kombinasi

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

juga memenuhi persamaan tersebut, dengan c_1 dan c_2 bilangan kompleks.

Ini disebut prinsip superposisi.

Contoh sederhana dari gelombang klasik adalah dua gelombang air yang bertemu. Di beberapa tempat puncak bertemu puncak dan menghasilkan gelombang lebih tinggi. Di tempat lain puncak bertemu lembah dan saling melemahkan. Dalam mekanika kuantum, superposisi bukan sekadar penjumlahan gangguan mekanik; ia berarti keadaan kuantum dapat menjadi kombinasi dari beberapa keadaan yang berbeda.

Misalnya, partikel bebas dapat dibangun dari banyak gelombang bidang:

$$\psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}\,dk.$$

Fungsi A(k) menentukan seberapa besar kontribusi masing-masing bilangan gelombang k. Jika rentang k sempit, momentum partikel cukup tertentu, tetapi posisinya menyebar. Jika paket gelombang terlokalisasi tajam di ruang, ia memerlukan campuran banyak k, sehingga momentumnya lebih tidak pasti. Ini adalah awal intuisi menuju prinsip ketidakpastian, yang akan dibahas secara sistematis pada Bab 9.

Di sini kita melihat bahwa mekanika kuantum tidak sekadar berkata “partikel adalah gelombang”. Lebih tepatnya: keadaan partikel diwakili oleh amplitudo kompleks yang dapat bersuperposisi, berevolusi menurut persamaan Schrödinger, dan menghasilkan prediksi probabilistik saat diukur.

3.14 Makna awal fungsi gelombang

Saat Schrödinger mengembangkan mekanika gelombangnya, makna fisik fungsi gelombang belum langsung seperti yang kita ajarkan hari ini. Schrödinger awalnya berharap gelombang itu dapat dipahami sebagai sesuatu yang lebih mirip distribusi muatan atau gelombang fisik nyata di ruang. Namun interpretasi yang bertahan dalam mekanika kuantum standar adalah interpretasi probabilistik Born: $|\psi|^2$ memberi rapat probabilitas untuk menemukan partikel pada posisi tertentu, setelah fungsi gelombang dinormalisasi (Born, 1926).

Kita belum akan membahas seluruh persoalan interpretasi di sini, tetapi kita perlu

Document information

Bab 3: Dari Tantangan Debye ke Persamaan Schrödinger

Project	Mekanika Kuantum
Document	Document 1.7
Author	terry.mart
Verifier	Not verified
Downloaded	July 06, 2026 00:20 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/mekanika-kuantum/documents/bab-3-dari-tantangan-debye-ke-persamaan-schrodinger/