Bab 22: Gas Fermi, Materi Terkondensasi, dan Bintang Netron

Pada bab-bab sebelumnya kita telah bertemu dengan salah satu prinsip paling kuat dalam mekanika kuantum: prinsip eksklusi Pauli. Prinsip ini menyatakan bahwa dua fermion identik tidak dapat menempati keadaan kuantum satu-partikel yang sama secara bersamaan. Untuk elektron, misalnya, satu keadaan orbital hanya dapat ditempati oleh dua elektron jika spin keduanya berlawanan. Gagasan ini diperkenalkan Pauli untuk menjelaskan struktur spektrum atom dan susunan elektron dalam atom (Pauli, 1925).

Pada Bab 19 kita mempelajari prinsip ini sebagai bagian dari statistik kuantum. Pada Bab 20 prinsip tersebut menjelaskan tabel periodik. Pada Bab 21 ia mulai muncul kembali dalam padatan, terutama dalam pembentukan pita energi. Sekarang kita akan melihat akibatnya dalam skala yang jauh lebih luas: dari elektron dalam logam, sampai katai putih, sampai bintang neutron.

Bab ini memiliki satu pesan utama:

> Prinsip kuantum yang sama yang mengatur susunan elektron dalam atom juga dapat menahan keruntuhan gravitasi sebuah bintang.

Ini adalah salah satu jembatan paling indah dalam fisika. Hukum yang lahir untuk menjelaskan spektrum atom ternyata diperlukan untuk memahami materi paling rapat di alam semesta.

22.1 Dari partikel bebas ke gas Fermi

Kita mulai dari sistem sederhana: banyak fermion bebas dalam sebuah kotak.

Bayangkan sebuah kotak kubik bervolume

$$V = L^3$$

berisi banyak partikel identik bermassa m. Untuk sementara, anggap partikel-partikel ini tidak saling berinteraksi. Artinya, energi total sistem adalah jumlah energi kinetik masing-masing partikel. Model seperti ini disebut gas ideal kuantum.

Jika partikelnya adalah fermion, gas ini disebut gas Fermi. Elektron dalam logam sering dapat didekati, pada tingkat pertama, sebagai gas Fermi elektron: elektron-elektron bergerak dalam latar ion positif dan, dalam pendekatan sederhana, diperlakukan seperti partikel bebas di dalam volume logam (Ashcroft dan Mermin, 1976).

Dalam mekanika klasik, jika suhu mendekati nol, kita mungkin membayangkan semua partikel berhenti bergerak. Tetapi untuk fermion kuantum, hal ini tidak mungkin. Mengapa?

Karena fermion tidak boleh semuanya berada pada keadaan kuantum terendah yang sama. Setelah keadaan energi paling rendah terisi, fermion berikutnya harus mengisi keadaan lain dengan energi lebih tinggi. Maka, bahkan pada suhu nol mutlak, gas Fermi masih memiliki energi kinetik total yang tidak nol.

Energi ini bukan energi termal biasa. Ia muncul dari kombinasi antara mekanika kuantum dan prinsip eksklusi Pauli.

22.2 Keadaan kuantum dalam ruang momentum

Untuk memahami gas Fermi, kita perlu menghitung berapa banyak keadaan kuantum yang tersedia.

Partikel bebas dalam kotak dapat memiliki momentum tertentu. Dalam tiga dimensi, momentum ditulis sebagai vektor

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z).$$

Ruang yang sumbu-sumbunya adalah p_x, $p_{(y)}$, dan $p_{(z)}$ disebut ruang momentum.

Karena partikel berada dalam kotak berukuran hingga, nilai momentum yang diizinkan tidak kontinu sepenuhnya. Dengan syarat batas periodik, keadaan-keadaan momentum tersusun seperti titik-titik kisi dalam ruang momentum. Dalam perhitungan makroskopik, ketika kotak sangat besar, titik-titik ini sangat rapat sehingga kita dapat menghitungnya dengan volume dalam ruang momentum.

Dalam mekanika kuantum, jumlah keadaan dalam elemen volume ruang posisi dan ruang momentum mengikuti aturan bahwa satu keadaan menempati volume fase sekitar

$$h^3,$$

dengan

$$h = 2\pi\hbar.$$

Untuk fermion spin-frac12, seperti elektron, setiap keadaan momentum dapat ditempati oleh dua partikel, satu dengan spin naik dan satu dengan spin turun. Faktor jumlah keadaan spin ini biasanya ditulis

$$g = 2.$$

Jika gas berada pada suhu nol, fermion mengisi semua keadaan momentum dari momentum terendah sampai suatu momentum maksimum. Momentum maksimum ini disebut momentum Fermi, ditulis $p_{(F)}$.

Di ruang momentum, keadaan yang terisi membentuk bola berjari-jari $p_{(F)}$. Maka jumlah partikel adalah

$$N = g\frac{V}{h^3}\frac{4\pi p_F^3}{3}.$$

Karena h=2πhbar, persamaan ini dapat ditulis menjadi

$$N = g\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\frac{4\pi p_F^3}{3}.$$

Untuk fermion spin-frac12, g=2, sehingga kerapatan partikel

$$n = \frac{N}{V}$$

memenuhi

$$n = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}.$$

Dengan demikian,

$$p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}.$$

Ini adalah hasil penting. Momentum Fermi ditentukan oleh kerapatan partikel, bukan oleh suhu. Jika gas Fermi sangat rapat, maka p_F besar, sehingga banyak fermion harus menempati keadaan momentum tinggi.

22.3 Energi Fermi

Jika partikelnya nonrelativistik, energi kinetiknya adalah

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Energi partikel pada permukaan bola Fermi disebut energi Fermi:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m}.$$

Dengan memasukkan rumus p_F, kita memperoleh

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}.$$

Energi Fermi adalah energi tertinggi yang terisi pada suhu nol.

Suhu yang bersesuaian dengan energi ini disebut suhu Fermi:

$$T_F = \frac{E_F}{k_B},$$

dengan k_B adalah konstanta Boltzmann.

Jika suhu nyata sistem jauh lebih kecil daripada T_F, yaitu

$$T \ll T_F,$$

maka gas tersebut disebut terdegenerasi. Kata “terdegenerasi” di sini tidak berarti rusak; artinya sifat sistem didominasi oleh pengisian keadaan kuantum menurut prinsip Pauli, bukan oleh energi termal klasik.

Sebagai contoh, elektron konduksi dalam logam seperti tembaga memiliki energi Fermi beberapa elektronvolt, yang bersesuaian dengan suhu Fermi sekitar puluhan ribu kelvin. Karena suhu kamar hanya sekitar 300 K, elektron dalam logam pada suhu kamar tetap merupakan gas Fermi terdegenerasi (Ashcroft dan Mermin, 1976).

Ini menjelaskan mengapa kapasitas kalor elektron dalam logam jauh lebih kecil daripada prediksi klasik. Dalam gambaran klasik, semua elektron seharusnya ikut menyimpan energi termal. Dalam gas Fermi, hanya elektron yang berada dekat permukaan Fermi yang mudah tereksitasi oleh energi termal kecil. Elektron jauh di bawah energi Fermi tidak dapat mudah naik ke keadaan lain karena keadaan di atasnya sudah terisi.

22.4 Distribusi Fermi-Dirac

Pada suhu tidak nol, pengisian keadaan energi tidak lagi berupa batas tajam sempurna. Probabilitas suatu keadaan energi E ditempati oleh fermion diberikan oleh distribusi Fermi-Dirac:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/(k_B T)} + 1}.$$

Di sini:

- f(E) adalah probabilitas keadaan energi E terisi,
- T adalah suhu mutlak,
- $k_{(B)}$ adalah konstanta Boltzmann,
- μ adalah potensial kimia, yaitu besaran yang mengatur perubahan energi sistem ketika jumlah partikel ditambah.

Distribusi ini muncul dari statistik kuantum untuk fermion dan dikembangkan dalam karya awal Fermi dan Dirac (Fermi, 1926; Dirac, 1926).

Pada suhu nol,

$$T = 0,$$

distribusi ini menjadi fungsi tangga:

$$f(E) = \begin{cases} 1, & E < E_F, \\ 0, & E > E_F. \end{cases}$$

Artinya semua keadaan di bawah energi Fermi terisi, dan semua keadaan di atasnya kosong.

Pada suhu kecil tetapi tidak nol, batas ini menjadi sedikit kabur. Namun jika Tll T(F), pengaburan hanya terjadi dekat E(F). Inilah sebabnya permukaan Fermi sangat penting dalam fisika logam.

22.5 Tekanan degenerasi

Sekarang kita sampai pada gagasan kunci: tekanan degenerasi.

Tekanan biasanya dipahami sebagai akibat partikel menumbuk dinding wadah. Dalam gas klasik, tekanan meningkat karena suhu meningkat: partikel bergerak lebih cepat dan menumbuk lebih kuat.

Tetapi dalam gas Fermi, bahkan pada suhu nol, partikel tetap memiliki momentum karena prinsip eksklusi Pauli. Momentum-momentum ini menghasilkan tekanan. Tekanan yang berasal dari pengisian keadaan kuantum fermion disebut tekanan degenerasi.

Mari kita hitung untuk gas Fermi nonrelativistik pada suhu nol.

Energi total gas Fermi nonrelativistik adalah

$$E_{\text{total}} = \frac{3}{5} N E_F.$$

Kerapatan energi adalah

$$u = \frac{E_{\text{total}}}{V} = \frac{3}{5} n E_F.$$

Untuk gas partikel bebas nonrelativistik, tekanan berhubungan dengan kerapatan energi melalui

$$P = \frac{2}{3}u.$$

Maka

$$P = \frac{2}{5}nE_F.$$

Dengan memasukkan rumus energi Fermi,

$$P = \frac{2}{5}n\left[\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}\right].$$

Jadi

$$P = \frac{\hbar^2}{5m}(3\pi^2)^{2/3}n^{5/3}.$$

Ini adalah persamaan keadaan gas Fermi nonrelativistik:

$$\boxed{P \propto n^{5/3}}$$

Perhatikan bahwa suhu tidak muncul dalam rumus ini. Tekanan tetap ada bahkan pada T=0.

Contoh fisisnya sangat penting. Jika kita memampatkan elektron dalam suatu materi sampai kerapatannya besar, maka energi Fermi naik. Elektron dipaksa mengisi keadaan momentum yang lebih tinggi. Akibatnya tekanan degenerasi elektron meningkat dan melawan pemampatan lebih lanjut.

22.6 Rezim relativistik

Rumus sebelumnya memakai energi kinetik nonrelativistik

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Rumus ini benar jika momentum partikel jauh lebih kecil daripada mc, yaitu

$$p \ll mc.$$

Tetapi dalam materi yang sangat rapat, momentum Fermi dapat menjadi sangat besar. Jika

$$p_F \gtrsim mc,$$

maka partikel harus diperlakukan secara relativistik.

Untuk partikel sangat relativistik, energi mendekati

$$E \approx pc.$$

Dalam kasus ini, tekanan gas Fermi pada suhu nol menjadi

$$P = \frac{1}{4} n p_F c.$$

Karena

$$p_F = \hbar (3\pi^2 n)^{1/3},$$

maka

$$P = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{1/3} n^{4/3}.$$

Jadi untuk gas Fermi sangat relativistik,

$$\boxed{P \propto n^{4/3}}$$

Perbedaan pangkat ini sangat penting. Dalam rezim nonrelativistik, tekanan bertambah seperti $n^{(5/3)}$. Dalam rezim relativistik, tekanan bertambah lebih lambat, yaitu seperti $n^{(4/3)}$. Akibatnya, pada kerapatan sangat tinggi, tekanan degenerasi tidak selalu cukup untuk menahan gravitasi.

Inilah pintu masuk menuju fisika katai putih dan bintang neutron.

22.7 Materi terkondensasi sebagai laboratorium gas Fermi

Istilah materi terkondensasi merujuk pada sistem dengan sangat banyak partikel yang saling berdekatan sehingga perilakunya ditentukan oleh sifat kolektif. Padatan, cairan, logam, semikonduktor, superkonduktor, dan magnet adalah contoh materi terkondensasi.

Dalam logam, elektron valensi dapat bergerak relatif bebas melalui kisi ion. Model paling sederhana memperlakukan elektron-elektron itu sebagai gas Fermi dalam kotak besar. Model ini disebut model elektron bebas atau model Sommerfeld. Walaupun sederhana, model ini berhasil menjelaskan beberapa sifat dasar logam, seperti hubungan antara permukaan Fermi, konduktivitas, dan kapasitas kalor elektron pada suhu rendah (Ashcroft dan Mermin, 1976).

Namun elektron dalam padatan tidak benar-benar bebas. Mereka bergerak dalam potensial periodik dari kisi kristal. Akibatnya, energi elektron membentuk pita energi, seperti telah kita bahas pada Bab 21.

Lalu mengapa gas Fermi masih berguna?

Karena banyak sifat elektron tetap dapat dipahami dengan ide yang sama: keadaan-keadaan energi diisi sampai energi Fermi. Dalam logam, energi Fermi berada di dalam pita yang belum penuh. Karena ada keadaan kosong dekat energi Fermi, elektron dapat merespons medan listrik. Dalam isolator, pita terisi penuh dipisahkan dari pita kosong oleh celah energi besar, sehingga elektron sulit bergerak bebas.

Dengan kata lain, gas Fermi adalah fondasi sederhana. Teori pita adalah penyempurnaannya untuk padatan nyata.

Contoh:

- Dalam logam, ada banyak keadaan kosong tepat di dekat energi Fermi, sehingga elektron mudah dipercepat oleh medan listrik.
- Dalam isolator, keadaan kosong terdekat berada jauh di atas energi Fermi, sehingga medan listrik lemah tidak cukup untuk memindahkan elektron.
- Dalam semikonduktor, celah energi lebih kecil, sehingga suhu, cahaya, atau doping dapat membuat elektron masuk ke pita konduksi.

Semua ini berakar pada cara fermion mengisi keadaan kuantum.

22.8 Katai putih: bintang yang ditahan oleh elektron

Sekarang kita berpindah dari logam ke bintang.

Sebuah bintang biasa, seperti Matahari, berada dalam keseimbangan antara dua pengaruh:

1. gravitasi menarik materi ke dalam,
2. tekanan gas panas dan radiasi mendorong ke luar.

Selama reaksi fusi nuklir berlangsung di inti, bintang memiliki sumber energi yang mempertahankan tekanan termal. Tetapi ketika bahan bakar nuklir habis, tekanan termal dapat menurun. Gravitasi kemudian memampatkan inti bintang.

Untuk bintang bermassa rendah sampai menengah, sisa akhirnya dapat berupa katai putih. Katai putih adalah objek sangat rapat, dengan massa sebanding massa Matahari tetapi ukuran sebanding ukuran Bumi. Penjelasan kuantum untuk stabilitas katai putih diberikan oleh Fowler, yang menerapkan statistik Fermi-Dirac pada materi rapat (Fowler, 1926).

Dalam katai putih, inti atom berada sangat berdekatan, dan elektron-elektron membentuk gas Fermi terdegenerasi. Tekanan degenerasi elektron melawan tarikan gravitasi.

Secara kasar, keseimbangan katai putih dapat dipahami sebagai berikut.

Jika bintang dimampatkan, volumenya mengecil. Maka kerapatan elektron n meningkat. Karena

$$p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3},$$

momentum Fermi meningkat. Elektron dipaksa menempati keadaan momentum yang lebih tinggi. Energi kinetik elektron meningkat, dan tekanan degenerasi naik.

Tekanan inilah yang menahan katai putih.

Hal yang luar biasa adalah tekanan ini tidak berasal dari panas. Katai putih dapat mendingin selama miliaran tahun, tetapi tekanan degenerasi elektron tetap ada selama prinsip Pauli tetap berlaku. Pendinginan membuat katai putih meredup, bukan langsung runtuh.

22.9 Relasi massa-radius katai putih

Katai putih memiliki sifat yang tampak aneh jika dibandingkan dengan benda sehari-hari:

> Semakin besar massanya, semakin kecil radiusnya.

Ini dapat dipahami dari tekanan degenerasi.

Untuk katai putih nonrelativistik, tekanan elektron kira-kira mengikuti

$$P \propto n_e^{5/3},$$

dengan n_e adalah kerapatan jumlah elektron. Jika massa bintang bertambah, gravitasi makin kuat. Agar tekanan degenerasi dapat menyeimbangkannya, bintang harus memampat, sehingga n_e bertambah. Maka radiusnya mengecil.

Dalam model sederhana, untuk katai putih nonrelativistik diperoleh hubungan kasar

$$R \propto M^{-1/3}.$$

Jadi massa lebih besar berarti radius lebih kecil.

Namun ketika massa bertambah lebih jauh, elektron menjadi relativistik. Tekanan degenerasi berubah dari

$$P \propto n_e^{5/3}$$

menjadi

$$P \propto n_e^{4/3}.$$

Karena tekanan bertambah lebih lambat terhadap kerapatan, ada batas massa maksimum. Batas ini dikenal sebagai batas Chandrasekhar. Chandrasekhar menunjukkan bahwa katai putih ideal memiliki massa maksimum sekitar 1,4 massa Matahari, dengan nilai tepat bergantung pada komposisi dan koreksi fisika tambahan (Chandrasekhar, 1931; Shapiro dan Teukolsky, 1983).

Secara konseptual, batas ini muncul karena pada massa terlalu besar, elektron relativistik tidak dapat memberikan tekanan degenerasi yang cukup kuat untuk menahan gravitasi.

22.10 Neutronisasi: ketika elektron dan proton bergabung

Apa yang terjadi jika inti bintang lebih masif daripada yang dapat ditahan oleh tekanan degenerasi elektron?

Pada kerapatan sangat tinggi, energi Fermi elektron menjadi sangat besar. Elektron-elektron memiliki energi yang cukup untuk ikut dalam reaksi

$$e^- + p \to n + \nu_e.$$

Reaksi ini disebut penangkapan elektron atau, dalam konteks astrofisika rapat, bagian dari proses neutronisasi. Di sini:

- e^- adalah elektron,
- p adalah proton,
- n adalah neutron,
- nu_e adalah neutrino elektron.

Secara sederhana, elektron dan proton bergabung membentuk neutron dan neutrino. Neutrino dapat membawa energi keluar dari sistem. Proses seperti ini penting dalam keruntuhan inti bintang masif dan pembentukan materi yang sangat kaya neutron (Shapiro dan Teukolsky, 1983).

Neutronisasi mengubah komposisi materi. Materi yang awalnya mengandung banyak proton dan elektron menjadi semakin kaya neutron. Jika keruntuhan gravitasi berhenti pada tahap tertentu, objek akhir dapat menjadi bintang neutron.

22.11 Bintang neutron: inti atom raksasa?

Bintang neutron adalah objek astrofisika sangat rapat yang massanya kira-kira sebanding dengan massa bintang, tetapi radiusnya hanya sekitar belasan kilometer. Gagasan bahwa supernova dapat menghasilkan bintang neutron diajukan oleh Baade dan Zwicky pada 1930-an (Baade dan Zwicky, 1934).

Bintang neutron sering digambarkan sebagai “inti atom raksasa”. Analogi ini berguna, tetapi harus hati-hati. Memang, kerapatan bintang neutron mendekati kerapatan inti atom, dan neutron memainkan peran dominan. Namun bintang neutron bukan sekadar inti atom besar. Ia adalah objek yang dipengaruhi oleh:

1. mekanika kuantum,
2. interaksi nuklir kuat,
3. relativitas khusus,
4. relativitas umum,
5. gravitasi ekstrem.

Dalam katai putih, tekanan utama berasal dari elektron degenerat. Dalam bintang neutron, tekanan penting berasal dari neutron degenerat dan interaksi antarpartikel nuklir. Karena neutron juga fermion spin-frac12, mereka juga tunduk pada prinsip eksklusi Pauli.

Jika neutron dipaksa berada dalam volume sangat kecil, mereka harus mengisi keadaan momentum tinggi. Maka muncul tekanan degenerasi neutron. Namun untuk bintang neutron nyata, tekanan degenerasi neutron saja bukan seluruh cerita. Interaksi kuat antara neutron, proton, dan partikel lain juga sangat penting. Karena itu, struktur bintang neutron bergantung pada persamaan keadaan materi nuklir rapat, yaitu hubungan antara tekanan, kerapatan, suhu, dan komposisi materi.

22.12 Keseimbangan hidrostatik dan gravitasi

Untuk memahami bintang kompak, kita perlu memahami keseimbangan antara tekanan dan gravitasi.

Dalam bintang biasa, sebuah lapisan materi ditarik ke dalam oleh gravitasi massa di bawahnya. Agar lapisan itu diam, tekanan dari bawah harus lebih besar daripada tekanan dari atas. Dalam fisika klasik Newton, kondisi ini ditulis sebagai persamaan keseimbangan hidrostatik:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}.$$

Di sini:

- P(r) adalah tekanan pada jarak r dari pusat,

- $\rho(r)$ adalah kerapatan massa,
- $M(r)$ adalah massa yang berada di dalam radius r,
- G adalah konstanta gravitasi Newton.

Persamaan ini mengatakan bahwa tekanan menurun ke arah luar. Gradien tekanan diperlukan untuk menahan berat lapisan-lapisan di atasnya.

Untuk katai putih yang tidak terlalu ekstrem, pendekatan Newton sering memberi gambaran awal yang baik. Tetapi untuk bintang neutron, medan gravitasinya begitu kuat sehingga relativitas umum harus digunakan. Persamaan keseimbangan relativistiknya dikenal sebagai persamaan Tolman-Oppenheimer-Volkoff, atau persamaan TOV (Tolman, 1939; Oppenheimer dan Volkoff, 1939).

Secara konseptual, persamaan TOV adalah versi relativitas umum dari keseimbangan hidrostatik. Ia memperhitungkan bahwa tekanan sendiri juga berkontribusi terhadap gravitasi, dan bahwa geometri ruang-waktu tidak lagi dapat dianggap datar.

22.13 Mengapa bintang neutron tidak runtuh langsung?

Pertanyaan pentingnya adalah:

> Jika gravitasi sangat kuat, mengapa bintang neutron tidak langsung menjadi lubang hitam?

Jawabannya bergantung pada keseimbangan antara gravitasi dan tekanan materi rapat.

Pada kerapatan bintang neutron, neutron membentuk sistem fermion sangat rapat. Prinsip Pauli membuat neutron tidak dapat semuanya berada pada keadaan momentum rendah yang sama. Tekanan degenerasi neutron memberikan perlawanan terhadap pemampatan.

Tetapi, tidak seperti kasus elektron dalam katai putih, kita tidak dapat hanya memakai gas Fermi bebas secara sederhana. Pada jarak antarneutron yang sangat kecil, interaksi nuklir kuat menjadi penting. Pada kerapatan lebih tinggi, kemungkinan munculnya proton, hiperion, kondensat meson, atau bahkan fase quark juga menjadi bahan kajian dalam fisika nuklir dan astrofisika modern. Struktur bintang neutron karena itu sangat sensitif terhadap persamaan keadaan materi rapat (Shapiro dan Teukolsky, 1983).

Jika massa bintang neutron terlalu besar, tidak ada tekanan yang cukup untuk menahan gravitasi. Objek tersebut dapat runtuh menjadi lubang hitam. Nilai massa maksimum bintang neutron tidak sesederhana batas Chandrasekhar, karena bergantung kuat pada persamaan keadaan materi nuklir rapat dan efek relativitas umum.

22.14 Perbandingan: logam, katai putih, dan bintang neutron

Sekarang kita dapat melihat satu pola besar.

Dalam logam, elektron membentuk gas Fermi pada kerapatan biasa. Efek Pauli menentukan sifat termal dan listriknya.

Dalam katai putih, elektron membentuk gas Fermi pada kerapatan jauh lebih tinggi. Efek Pauli menghasilkan tekanan degenerasi yang dapat menahan gravitasi bintang.

Dalam bintang neutron, neutron membentuk materi Fermi yang sangat rapat. Efek Pauli masih penting, tetapi harus digabungkan dengan interaksi nuklir kuat dan relativitas umum.

Ketiganya berbeda skala, tetapi memakai bahasa dasar yang sama:

$$p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}.$$

Jika kerapatan n naik, momentum Fermi naik. Jika momentum Fermi naik, energi kinetik kuantum naik. Jika energi naik saat volume diperkecil, sistem menghasilkan tekanan.

Inilah inti dari tekanan degenerasi.

22.15 Contoh perhitungan: energi Fermi elektron dalam logam

Mari kita ambil contoh kasar elektron dalam logam dengan kerapatan elektron

$$n \sim 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Energi Fermi nonrelativistiknya adalah

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}(3\pi^2 n)^{2/3}.$$

Dengan

$$\hbar \approx 1{,}05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s},$$

$$m_e \approx 9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg},$$

dan

$$n \sim 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3},$$

diperoleh

$$E_F \sim \text{beberapa eV}.$$

Satu elektronvolt memenuhi

$$1\ \mathrm{eV} \approx 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Suhu Fermi menjadi

$$T_F = \frac{E_F}{k_B}.$$

Karena 1 eV bersesuaian dengan sekitar $1{,}16 \times 10^4$ K, energi Fermi beberapa eV berarti suhu Fermi sekitar puluhan ribu kelvin.

Jadi pada suhu kamar, elektron logam bukan gas klasik. Mereka adalah gas Fermi terdegenerasi.

22.16 Contoh perhitungan: kapan elektron menjadi relativistik?

Elektron menjadi relativistik ketika momentum Ferminya mendekati

$$p_F \sim m_e c.$$

Karena

$$p_F = \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3},$$

syaratnya kira-kira

$$\hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3} \sim m_e c.$$

Maka

$$n_e \sim \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3.$$

Besaran

$$\frac{\hbar}{m_e c}$$

adalah panjang gelombang Compton tereduksi elektron. Nilainya sekitar

$$3{,}86 \times 10^{-13}\ \mathrm{m}.$$

Maka kerapatan elektron relativistik kira-kira

$$n_e \sim 10^{35}\text{–}10^{36}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Kerapatan ini jauh lebih besar daripada kerapatan elektron dalam logam, tetapi relevan dalam katai putih masif. Itulah sebabnya relativitas khusus masuk secara alami dalam teori katai putih.

22.17 Dari mekanika kuantum ke astrofisika

Kita dapat merangkum jalur logikanya sebagai berikut.

Pertama, mekanika kuantum memberi keadaan diskret dalam ruang fase. Partikel tidak dapat memiliki sebarang keadaan secara klasik; keadaan kuantumnya dihitung dengan aturan yang melibatkan hbar.

Kedua, fermion tunduk pada prinsip eksklusi Pauli. Dua fermion identik tidak dapat menempati keadaan kuantum satu-partikel yang sama.

Ketiga, jika banyak fermion dipadatkan, mereka mengisi keadaan momentum yang makin tinggi. Ini menghasilkan energi Fermi.

Keempat, perubahan energi terhadap volume menghasilkan tekanan. Tekanan ini disebut tekanan degenerasi.

Kelima, dalam benda langit kompak, tekanan degenerasi dapat melawan gravitasi. Untuk katai putih, tekanan degenerasi elektron adalah kunci. Untuk bintang neutron, tekanan degenerasi neutron dan interaksi nuklir kuat menjadi kunci.

Dengan demikian, kuantum bukan hanya teori dunia mikroskopik. Ia juga menentukan nasib bintang.

22.18 Batas validitas model gas Fermi bebas

Model gas Fermi bebas sangat berguna, tetapi kita perlu tahu batasnya.

Untuk elektron dalam logam, interaksi elektron-elektron dan potensial kisi kristal tidak benar-benar nol. Dalam banyak logam, model elektron bebas memberi gambaran awal yang baik, tetapi teori pita dan teori many-body diperlukan untuk akurasi lebih tinggi (Ashcroft dan Mermin, 1976).

Untuk katai putih, model gas Fermi elektron menjelaskan struktur dasar dan batas massa. Namun koreksi komposisi, relativitas, suhu, rotasi, medan magnet, dan efek relativitas umum dapat memperbaiki gambaran sederhana (Shapiro dan Teukolsky, 1983).

Untuk bintang neutron, model gas Fermi bebas hanya langkah awal. Materi berada pada kerapatan nuklir atau lebih tinggi. Interaksi kuat, superfluiditas neutron, proton, elektron, muon, dan kemungkinan derajat kebebasan eksotik dapat berperan. Persamaan keadaan materi rapat masih merupakan bidang riset aktif.

Jadi, model sederhana bukan akhir cerita. Ia adalah kerangka pertama yang membantu kita melihat mengapa tekanan kuantum muncul sama sekali.

22.19 Ringkasan bab

Dalam bab ini kita mempelajari bagaimana statistik fermion menghasilkan konsekuensi makroskopik.

Gas Fermi adalah sistem banyak fermion identik. Pada suhu nol, keadaan energi terisi dari bawah sampai energi Fermi. Momentum tertinggi yang terisi disebut momentum Fermi:

$$p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}.$$

Untuk gas Fermi nonrelativistik,

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m},$$

dan tekanan degenerasinya memenuhi

$$P \propto n^{5/3}.$$

Untuk gas Fermi sangat relativistik,

$$E \approx pc,$$

dan tekanannya memenuhi

$$P \propto n^{4/3}.$$

Tekanan degenerasi berasal dari prinsip eksklusi Pauli, bukan dari suhu. Ia menjelaskan mengapa elektron dalam logam berperilaku sangat berbeda dari gas klasik, mengapa katai putih dapat stabil, dan mengapa ada batas massa untuk katai putih.

Pada kerapatan lebih tinggi, elektron dapat ditangkap oleh proton melalui proses neutronisasi,

$$e^- + p \to n + \nu_e,$$

membentuk materi kaya neutron. Jika keseimbangan baru tercapai, objek yang terbentuk adalah bintang neutron. Untuk memahami bintang neutron secara serius, mekanika kuantum harus digabungkan dengan interaksi nuklir dan relativitas umum.

Bab ini menutup lingkaran besar: dari atom dan elektron, kita sampai pada bintang. Prinsip yang sama bekerja pada semua skala.

References

Ashcroft, N. W., dan Mermin, N. D. (1976). Solid State Physics. Holt, Rinehart and Winston.

Baade, W., dan Zwicky, F. (1934). Cosmic rays from super-novae. Proceedings of the National Academy of Sciences, 20(5), 259–263.

Chandrasekhar, S. (1931). The maximum mass of ideal white dwarfs. The Astrophysical Journal, 74, 81.

Dirac, P. A. M. (1926). On the theory of quantum mechanics. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 112(762), 661–677.

Fermi, E. (1926). Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico. Rendiconti Lincei, 3, 145–149.

Fowler, R. H. (1926). On dense matter. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 87, 114–122.

Oppenheimer, J. R., dan Volkoff, G. M. (1939). On massive neutron cores. Physical Review, 55(4), 374–381.

Pauli, W. (1925). Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. Zeitschrift für Physik, 31, 765–783.

Shapiro, S. L., dan Teukolsky, S. A. (1983). Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects. Wiley.

Tolman, R. C. (1939). Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. Physical Review, 55(4), 364–373.

Document information

Bab 22: Gas Fermi, Materi Terkondensasi, dan Bintang Netron

Project	Mekanika Kuantum
Document	Document 1.26
Author	terry.mart
Verifier	Not verified
Downloaded	July 06, 2026 02:36 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/mekanika-kuantum/documents/bab-22-gas-fermi--materi-terkondensasi-dan-bintang-netron/