Bab 16: Penjumlahan Momentum Sudut dan Struktur Halus

Pada Bab 14 kita melihat bahwa atom hidrogen, dalam pendekatan Schrödinger nonrelativistik, memiliki tingkat energi

$$E_n = -\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n^2},$$

dengan n=1,2,3,.... Energi ini hanya bergantung pada bilangan kuantum utama n, bukan pada l dan m. Akibatnya, banyak keadaan berbeda memiliki energi yang sama. Keadaan seperti itu disebut degenerat.

Pada Bab 15 kita menambahkan spin elektron. Elektron bukan hanya memiliki momentum sudut orbital mathbf L, tetapi juga momentum sudut intrinsik mathbf S. Sekarang muncul pertanyaan baru:

> Jika sebuah elektron memiliki mathbf L dan mathbf S, momentum sudut manakah yang "dilihat" oleh atom secara keseluruhan?

Jawabannya adalah momentum sudut total

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}.$$

Bab ini membahas cara menjumlahkan momentum sudut secara kuantum, mengapa basis $|l,m_l\rangle\ |s,m_s\rangle$ kadang kurang nyaman, bagaimana muncul basis baru $|j,m_j\rangle$, dan bagaimana koreksi kecil seperti kopling spin-orbit, efek Zeeman, dan struktur halus memperkaya spektrum atom.

Secara fisika, bab ini menjelaskan mengapa garis spektrum yang pada pendekatan kasar tampak tunggal ternyata dapat terpecah menjadi beberapa garis berdekatan. Secara matematika, bab ini memperkenalkan salah satu teknik paling penting dalam mekanika kuantum: penjumlahan momentum sudut.

16.1 Mengapa momentum sudut perlu dijumlahkan?

Dalam mekanika klasik, jika sebuah benda memiliki dua kontribusi momentum sudut, kita menjumlahkannya sebagai vektor biasa. Misalnya, jika ada momentum sudut orbital mathbf L dan momentum sudut spin mathbf S, momentum sudut totalnya adalah

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}.$$

Dalam mekanika kuantum, persamaan ini tetap benar sebagai persamaan operator. Namun, ada hal baru: komponen-komponen momentum sudut tidak semuanya dapat diketahui serentak.

Untuk momentum sudut orbital, kita telah mengenal relasi komutasi

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z,$$

beserta sikliknya. Artinya, L_x, $L_{(y)}$, dan $L_{(z)}$ tidak dapat memiliki nilai pasti secara bersamaan. Yang biasanya kita pilih sebagai pasangan observable yang kompatibel adalah

$$L^2 \quad \text{dan} \quad L_z.$$

Keadaan orbital ditulis sebagai

$$|l, m_l\rangle,$$

dengan

$$L^2|l, m_l\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m_l\rangle,$$

dan

$$L_z|l, m_l\rangle = \hbar m_l|l, m_l\rangle.$$

Untuk spin elektron,

$$s = \frac{1}{2},$$

dan keadaan spin ditulis

$$|s, m_s\rangle,$$

dengan

$$m_s = +\frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad m_s = -\frac{1}{2}.$$

Jika orbital dan spin belum saling berinteraksi, keadaan total dapat ditulis sebagai hasil kali

$$|l, m_l\rangle |s, m_s\rangle.$$

Ini disebut basis tak tergandeng atau uncoupled basis, karena mathbf L dan mathbf S masih diperlakukan sebagai dua momentum sudut terpisah.

Tetapi jika ada interaksi yang bergantung pada mathbf L· mathbf S, basis ini tidak lagi paling sederhana. Interaksi seperti itu muncul dalam atom sebagai kopling spin-orbit. Untuk memahami kopling ini, kita perlu basis yang mengutamakan momentum sudut total

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}.$$

Basis baru itu ditulis

$$|j, m_j\rangle,$$

atau lebih lengkap

$$|l, s; j, m_j\rangle.$$

Basis ini disebut basis tergandeng atau coupled basis.

16.2 Aturan penjumlahan momentum sudut kuantum

Misalkan kita memiliki dua momentum sudut kuantum

$$\mathbf{J}_1$$

dan

$$\mathbf{J}_2.$$

Momentum sudut totalnya adalah

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2.$$

Jika

$$J_1^2|j_1, m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1)|j_1, m_1\rangle$$

dan

$$J_2^2|j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1)|j_2, m_2\rangle,$$

maka nilai j yang mungkin untuk momentum sudut total adalah

$$j = |j_1 - j_2|,\ |j_1 - j_2| + 1, \ldots,\ j_1 + j_2.$$

Sementara itu, proyeksi total memenuhi

$$m = m_1 + m_2.$$

Aturan ini merupakan salah satu hasil dasar teori momentum sudut kuantum dan dibahas secara sistematis dalam banyak teks mekanika kuantum modern, misalnya Griffiths dan Schroeter serta Sakurai dan Napolitano (Griffiths & Schroeter, 2018; Sakurai & Napolitano, 2020).

Contoh: dua spin-frac12

Ambil dua partikel spin-frac12. Masing-masing memiliki

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{2}.$$

Maka spin total s dapat bernilai

$$s = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right|, \ldots, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Jadi,

$$s = 0 \quad \text{atau} \quad s = 1.$$

Keadaan dengan s=1 disebut triplet, karena memiliki tiga nilai m_s:

$$m_s = 1, 0, -1.$$

Keadaannya adalah

$$|1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle,$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right),$$

$$|1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle.$$

Keadaan dengan s=0 disebut singlet, karena hanya memiliki satu nilai m_s:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right).$$

Contoh ini penting karena memperlihatkan bahwa penjumlahan momentum sudut tidak sekadar menjumlahkan angka. Dua keadaan

$$|\uparrow\downarrow\rangle$$

dan

$$|\downarrow\uparrow\rangle$$

dapat membentuk kombinasi simetris dan antisimetris. Nanti, dalam Bab 19, struktur simetri seperti ini menjadi dasar pembahasan partikel identik, boson, fermion, dan prinsip eksklusi Pauli.

16.3 Koefisien Clebsch-Gordan secara konseptual

Ketika kita berpindah dari basis tak tergandeng

$$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

ke basis tergandeng

$$|j, m\rangle,$$

kita memerlukan koefisien yang menghubungkan keduanya.

Secara umum,

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{jm}_{j_1 m_1\, j_2 m_2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle.$$

Koefisien

$$C^{jm}_{j_1 m_1\, j_2 m_2}$$

disebut koefisien Clebsch-Gordan.

Maknanya sederhana:

> Koefisien Clebsch-Gordan adalah amplitudo probabilitas bahwa keadaan total $|j,m\rangle$ tersusun dari pasangan keadaan $|j_1,m_1\rangle$ $|j_2,m_2\rangle$.

Karena ia adalah amplitudo, kuadrat modulusnya memberikan probabilitas.

Koefisien ini tidak sembarang. Ia hanya tidak nol jika

$$m = m_1 + m_2.$$

Syarat ini menyatakan bahwa proyeksi momentum sudut total adalah jumlah proyeksi masing-masing.

Contoh: l=1 dan s=frac12

Dalam atom, kita sering menjumlahkan momentum sudut orbital elektron mathbf L dan spin elektron mathbf S. Misalkan

$$l = 1,$$

dan

$$s = \frac{1}{2}.$$

Maka nilai j yang mungkin adalah

$$j = l + s = \frac{3}{2},$$

atau

$$j = l - s = \frac{1}{2}.$$

Jadi dari orbital p, yaitu l=1, kita memperoleh dua keluarga keadaan total:

$$j = \frac{3}{2}$$

dan

$$j = \frac{1}{2}.$$

Salah satu keadaan dengan j=frac32 adalah keadaan maksimum

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle.$$

Karena mⱼ=frac32, satu-satunya cara mendapatkannya adalah

$$m_l = 1, \qquad m_s = \frac{1}{2}.$$

Maka

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = |1,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Untuk mⱼ=frac12, ada dua kemungkinan:

$$m_l = 0, \quad m_s = \frac{1}{2},$$

atau

$$m_l = 1, \quad m_s = -\frac{1}{2}.$$

Keadaan totalnya merupakan superposisi dua kemungkinan tersebut. Dengan konvensi fase standar,

$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Sedangkan keadaan ortogonalnya dengan j=frac12 adalah

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Tanda minus di sini bergantung pada konvensi fase. Probabilitas fisiknya tidak berubah oleh pilihan fase global, tetapi tabel Clebsch-Gordan biasanya memakai satu konvensi tertentu agar semua hasil konsisten (Griffiths & Schroeter, 2018; Sakurai & Napolitano, 2020).

16.4 Operator mathbf L·mathbf S

Kopling spin-orbit melibatkan operator

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}.$$

Jika kita bekerja dalam basis tak tergandeng $|l,m_l\rangle\ |s,m_s\rangle$, operator ini tidak selalu diagonal. Tetapi dalam basis tergandeng $|l,s;j,m_j\rangle$, ia menjadi sangat sederhana.

Mulai dari

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}.$$

Kuadratkan kedua sisi:

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}.$$

Maka

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right).$$

Jika keadaan kita adalah eigenstate bersama dari J^2, L^2, dan S^2, maka

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

langsung memiliki nilai harapan

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right].$$

Untuk elektron,

$$s = \frac{1}{2},$$

sehingga

$$s(s+1) = \frac{3}{4}.$$

Contoh: orbital p

Untuk orbital p,

$$l = 1.$$

Nilai j yang mungkin adalah

$$j = \frac{3}{2}$$

dan

$$j = \frac{1}{2}.$$

Untuk j=frac32,

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{3}{2}\frac{5}{2} - 1(2) - \frac{3}{4} \right].$$

Hitung bagian dalam kurung:

$$\frac{3}{2}\frac{5}{2} = \frac{15}{4},$$

$$1(2) = 2 = \frac{8}{4},$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Jadi

$$\frac{15}{4} - \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Maka

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle = \frac{\hbar^2}{2}.$$

Untuk j=frac12,

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{3}{2} - 2 - \frac{3}{4} \right].$$

Karena

$$\frac{1}{2} \frac{3}{2} = \frac{3}{4},$$

maka

$$\frac{3}{4} - 2 - \frac{3}{4} = -2.$$

Jadi

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle = -\hbar^2.$$

Artinya, keadaan $p_{(3/2)}$ dan $p_{(1/2)}$ memiliki energi berbeda jika Hamiltonian memuat suku yang sebanding dengan mathbf L·mathbf S.

Inilah inti matematis pemisahan spin-orbit.

16.5 Kopling spin-orbit: asal fisik

Sekarang kita bertanya: mengapa dalam atom muncul suku mathbf L·mathbf S?

Secara kasar, elektron bergerak dalam medan listrik inti. Dalam kerangka diam elektron, medan listrik ini tampak sebagian sebagai medan magnet. Karena elektron memiliki momen magnetik spin, medan magnet efektif tersebut berinteraksi dengan spin elektron. Hasil akhirnya adalah energi interaksi yang bergantung pada orientasi relatif antara mathbf L dan mathbf S.

Namun, penjelasan ini harus diberi catatan penting. Transformasi dari kerangka laboratorium ke kerangka elektron tidak cukup jika dilakukan terlalu sederhana, karena kerangka elektron yang mengorbit inti merupakan kerangka dipercepat. Koreksi kinematik yang dikenal sebagai presesi Thomas menghasilkan faktor penting 1/2 dalam kopling spin-orbit. Faktor ini dijelaskan oleh L. H. Thomas dalam analisis relativistik terhadap elektron ber-spin (Thomas, 1926).

Untuk potensial pusat V(r), bentuk kopling spin-orbit nonrelativistik orde pertama adalah

$$H_{\mathrm{SO}} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}.$$

Di sini:

- m adalah massa elektron,
- c adalah kelajuan cahaya,
- V(r) adalah energi potensial elektron,
- mathbf L adalah momentum sudut orbital,
- mathbf S adalah spin elektron.

Untuk atom hidrogen,

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Maka

$$\frac{dV}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

sehingga

$$\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Jadi, untuk hidrogen,

$$H_{\mathrm{SO}} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2 c^2}\frac{1}{r^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}.$$

Bentuk ini menunjukkan dua hal penting.

Pertama, efek spin-orbit lebih kuat ketika elektron lebih dekat ke inti, karena faktor $1/r^3$.

Kedua, energi bergantung pada orientasi relatif antara mathbf L dan mathbf S. Jika mathbf L dan mathbf S cenderung sejajar, nilai mathbf L·mathbf S positif. Jika cenderung berlawanan arah, nilainya negatif.

16.6 Notasi spektroskopi: s, p, d, dan j

Dalam atom, nilai l sering diberi nama huruf:

$$l = 0 \quad \Rightarrow \quad s,$$

$$l = 1 \quad \Rightarrow \quad p,$$

$$l = 2 \quad \Rightarrow \quad d,$$

$$l = 3 \quad \Rightarrow \quad f.$$

Huruf-huruf ini berasal dari tradisi spektroskopi lama: sharp, principal, diffuse, dan fundamental. Nama-nama tersebut mendahului mekanika kuantum modern, tetapi tetap dipakai hingga sekarang dalam notasi atomik (Griffiths & Schroeter, 2018).

Jika spin diperhitungkan, keadaan atom hidrogen sering ditulis sebagai

$$nl_j.$$

Contohnya:

$$2p_{1/2}$$

berarti

$$n = 2, \qquad l = 1, \qquad j = \frac{1}{2}.$$

Sedangkan

$$2p_{3/2}$$

berarti

$$n = 2, \qquad l = 1, \qquad j = \frac{3}{2}.$$

Kedua keadaan ini memiliki n dan l yang sama, tetapi j berbeda. Karena kopling spin-orbit bergantung pada j, keduanya dapat memiliki energi berbeda.

16.7 Struktur halus atom hidrogen

Pada pendekatan Schrödinger sederhana, energi hidrogen hanya bergantung pada n. Tetapi eksperimen menunjukkan bahwa garis spektrum hidrogen memiliki pemisahan kecil. Pemisahan kecil ini disebut struktur halus.

Istilah “halus” berarti bahwa pemisahannya jauh lebih kecil daripada jarak utama antara tingkat energi Bohr. Secara orde besar, energi utama hidrogen berskala

$$mc^2\alpha^2,$$

sedangkan koreksi struktur halus berskala

$$mc^2\alpha^4.$$

Di sini

$$\alpha \approx \frac{1}{137}$$

adalah konstanta struktur halus, yaitu konstanta tak berdimensi yang mengukur kekuatan interaksi elektromagnetik. Karena α^2 sangat kecil, koreksi struktur halus jauh lebih kecil daripada energi utama.

Struktur halus hidrogen berasal dari tiga koreksi utama dalam pendekatan nonrelativistik:

1. koreksi relativistik terhadap energi kinetik,
2. kopling spin-orbit,
3. suku Darwin.

Ketiganya juga muncul secara alami dari ekspansi energi relativistik dan dari teori Dirac untuk elektron. Persamaan Dirac, yang diperkenalkan pada tahun 1928, memberikan teori relativistik elektron dan menjelaskan spin elektron serta struktur halus hidrogen dalam satu kerangka yang lebih mendasar (Dirac, 1928).

16.8 Koreksi relativistik energi kinetik

Dalam mekanika nonrelativistik, energi kinetik adalah

$$T = \frac{p^2}{2m}.$$

Tetapi dalam relativitas khusus, energi total partikel bebas adalah

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

Energi kinetiknya adalah

$$T = E - mc^2.$$

Untuk momentum kecil dibanding mc, kita dapat melakukan ekspansi:

$$T = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \cdots .$$

Suku pertama adalah energi kinetik biasa. Suku berikutnya,

$$H_{\text{rel}} = -\frac{p^4}{8m^3c^2},$$

adalah koreksi relativistik pertama.

Dalam atom hidrogen, elektron tidak bergerak dengan kelajuan relativistik penuh, tetapi koreksi kecil ini tetap cukup untuk memecah tingkat energi jika pengukuran spektroskopi sangat presisi.

16.9 Suku Darwin

Suku Darwin adalah koreksi lain yang muncul ketika teori relativistik elektron direduksi ke bentuk nonrelativistik. Secara fisika, suku ini berkaitan dengan fakta bahwa elektron relativistik tidak dapat diperlakukan sebagai titik klasik yang selalu memiliki posisi tajam dalam cara yang sama seperti partikel nonrelativistik sederhana.

Untuk potensial V(r), bentuk suku Darwin adalah

$$H_D = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2 V.$$

Untuk potensial Coulomb, $\nabla^2 V$ hanya memberi kontribusi di r=0. Karena fungsi gelombang dengan l=0 tidak nol di inti, suku Darwin memengaruhi keadaan s. Sebaliknya, untuk l>0, fungsi gelombang hidrogen memiliki faktor r^l di dekat r=0, sehingga kontribusi Darwin tidak muncul dengan cara yang sama.

Suku Darwin sering terasa abstrak pada tingkat awal, tetapi perannya penting: tanpa suku ini, hasil struktur halus hidrogen tidak cocok dengan hasil ekspansi teori Dirac (Griffiths & Schroeter, 2018; Sakurai & Napolitano, 2020).

16.10 Hasil energi struktur halus

Jika ketiga koreksi—relativistik, spin-orbit, dan Darwin—digabungkan, koreksi struktur halus atom hidrogen dapat ditulis sebagai

$$\Delta E_{nj} = \frac{\left(E_n^{(0)}\right)^2}{2mc^2}\left[3 - \frac{4n}{j+\frac{1}{2}}\right],$$

dengan

$$E_n^{(0)} = -\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}.$$

Bentuk lain yang sering dipakai adalah

$$E_{nj} = -\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)\right].$$

Rumus ini menunjukkan bahwa, setelah struktur halus diperhitungkan, energi tidak lagi hanya bergantung pada n, tetapi juga pada j.

Namun, dalam pendekatan struktur halus hidrogen ini, energi masih tidak bergantung pada l secara terpisah. Misalnya, keadaan

$$2s_{1/2}$$

dan

$$2p_{1/2}$$

masih memiliki energi yang sama dalam teori Dirac ideal untuk atom hidrogen tanpa koreksi tambahan tertentu. Eksperimen Lamb dan Retherford pada tahun 1947 menunjukkan adanya pergeseran kecil antara tingkat tersebut, yang kini dikenal sebagai Lamb shift dan memerlukan elektrodinamika kuantum untuk penjelasan lengkap (Lamb & Retherford, 1947).

Ini memberi pelajaran penting: mekanika kuantum nonrelativistik menjelaskan struktur utama atom; koreksi relativistik menjelaskan struktur halus; elektrodinamika kuantum menjelaskan koreksi yang lebih kecil lagi.

16.11 Contoh: pemisahan 2p₍1/2₎ dan 2p₍3/2₎

Pertimbangkan keadaan dengan

$$n = 2, \qquad l = 1.$$

Ini adalah keadaan 2p. Karena elektron memiliki spin

$$s = \frac{1}{2},$$

maka

$$j = \frac{1}{2}$$

atau

$$j = \frac{3}{2}.$$

Jadi keadaan 2p terpecah menjadi

$$2p_{1/2}$$

dan

$$2p_{3/2}.$$

Secara kualitatif:

- pada 2p(3/2), mathbf L dan mathbf S lebih “searah”,
- pada 2p(1/2), mathbf L dan mathbf S lebih “berlawanan”.

Karena energi spin-orbit bergantung pada

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S},$$

kedua keadaan ini tidak harus memiliki energi sama.

Mari lihat tanda koreksi struktur halusnya.

Untuk n=2, j=frac12,

$$j + \frac{1}{2} = 1.$$

Maka faktor dalam kurung adalah

$$3 - \frac{4n}{j + \frac{1}{2}} = 3 - \frac{8}{1} = -5.$$

Untuk j=frac32,

$$j + \frac{1}{2} = 2,$$

sehingga

$$3 - \frac{8}{2} = 3 - 4 = -1.$$

Karena

$$\frac{(E_n^{(0)})^2}{2mc^2}$$

positif, koreksi untuk j=frac12 lebih negatif daripada untuk j=frac32. Jadi tingkat 2p(1/2) berada sedikit lebih rendah daripada 2p(3/2) dalam struktur halus hidrogen ideal.

16.12 Efek Zeeman: atom dalam medan magnet

Sekarang kita tambahkan medan magnet luar. Jika atom ditempatkan dalam medan magnet

$$\mathbf{B} = B\hat{z},$$

maka momen magnetik elektron berinteraksi dengan medan tersebut.

Secara umum, energi interaksi momen magnetik boldsymbolμ dengan medan magnet adalah

$$H_Z = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}.$$

Untuk elektron, momen magnetik orbital adalah

$$\boldsymbol{\mu}_L = -\frac{e}{2m}\mathbf{L},$$

dengan e>0 adalah besar muatan elementer. Tanda minus muncul karena muatan elektron adalah -e.

Momen magnetik spin adalah

$$\boldsymbol{\mu}_S = -g_s\frac{e}{2m}\mathbf{S},$$

dengan

$$g_s \approx 2.$$

Nilai g_s yang mendekati 2 merupakan salah satu hasil penting teori Dirac untuk elektron (Dirac, 1928). Koreksi kecil terhadap nilai 2 dijelaskan oleh elektrodinamika kuantum, tetapi untuk pembahasan struktur atom dasar biasanya cukup memakai $g_s$simeq 2.

Dengan mendefinisikan magneton Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m},$$

Hamiltonian Zeeman dapat ditulis

$$H_Z = \mu_B B \left(\frac{L_z}{\hbar} + g_s \frac{S_z}{\hbar} \right).$$

Efek Zeeman pertama kali diamati sebagai pemisahan garis spektrum oleh medan magnet pada akhir abad ke-19, sebelum mekanika kuantum modern tersedia (Zeeman, 1897). Dalam bahasa mekanika kuantum, pemisahan itu terjadi karena medan magnet membedakan keadaan dengan proyeksi momentum sudut berbeda.

16.13 Efek Zeeman lemah dan faktor Landé

Jika medan magnet luar cukup lemah dibanding kopling spin-orbit internal atom, maka mathbf L dan mathbf S tetap tergandeng menjadi

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}.$$

Dalam keadaan ini, basis yang tepat adalah

$$|l, s; j, m_j\rangle.$$

Energi Zeeman orde pertama dapat ditulis

$$\Delta E_Z = \mu_B g_J m_j B,$$

dengan $g_{(J)}$ disebut faktor Landé.

Untuk elektron dengan g(L)=1 dan g(S)simeq 2, faktor Landé adalah

$$g_J = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}.$$

Rumus ini mengatakan bahwa medan magnet “melihat” kombinasi orbital dan spin melalui momentum sudut total mathbf J.

Contoh: keadaan p(3/2)

Untuk keadaan p(3/2),

$$l = 1, \qquad s = \frac{1}{2}, \qquad j = \frac{3}{2}.$$

Hitung

$$j(j+1) = \frac{3}{2}\frac{5}{2} = \frac{15}{4},$$

$$s(s+1) = \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4},$$

$$l(l+1) = 1(2) = 2.$$

Maka

$$g_J = 1 + \frac{\frac{15}{4} + \frac{3}{4} - 2}{2 \cdot \frac{15}{4}}.$$

Bagian atas:

$$\frac{15}{4} + \frac{3}{4} - 2 = \frac{18}{4} - \frac{8}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Bagian bawah:

$$2 \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{2}.$$

Jadi

$$g_J = 1 + \frac{\frac{5}{2}}{\frac{15}{2}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Karena j=frac32, nilai m_j adalah

$$m_j = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}.$$

Maka dalam medan magnet lemah, tingkat $p_{(3/2)}$ terpecah menjadi empat subtingkat dengan jarak energi sebanding dengan

$$\mu_B g_J B.$$

16.14 Efek Zeeman kuat dan batas Paschen-Back

Jika medan magnet luar sangat kuat dibanding kopling spin-orbit, maka medan

Document information

Bab 16: Penjumlahan Momentum Sudut dan Struktur Halus

Project	Mekanika Kuantum
Document	Document 1.20
Author	terry.mart
Verifier	Not verified
Downloaded	July 06, 2026 02:36 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/mekanika-kuantum/documents/bab-16-penjumlahan-momentum-sudut-dan-struktur-halus/