Bab 12: Momentum Sudut dalam Mekanika Kuantum

Pada bab-bab sebelumnya kita telah membangun bahasa dasar mekanika kuantum: fungsi gelombang, operator, nilai eigen, komutator, evolusi waktu, dan osilator harmonik. Sekarang kita memasuki salah satu konsep yang paling penting dalam sistem tiga dimensi: momentum sudut.

Dalam mekanika klasik, momentum sudut muncul ketika gerak memiliki unsur rotasi. Sebuah planet yang mengitari Matahari, bola yang berputar, atau partikel yang bergerak melingkar semuanya memiliki momentum sudut. Dalam mekanika kuantum, konsep ini tetap penting, tetapi bentuknya berubah secara mendalam. Momentum sudut bukan lagi sekadar vektor biasa yang dapat diketahui semua komponennya sekaligus. Ia menjadi sekumpulan operator yang tidak saling komutatif.

Bab ini membahas momentum sudut orbital, yaitu momentum sudut yang berasal dari gerak partikel dalam ruang. Spin akan dibahas pada Bab 15. Perbedaan ini penting: momentum sudut orbital berkaitan dengan operator posisi dan momentum,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

sedangkan spin adalah derajat kebebasan intrinsik yang tidak dapat dijelaskan sebagai gerak melingkar sederhana dalam ruang biasa. Struktur matematis keduanya mirip, tetapi asal fisiknya berbeda (Sakurai & Napolitano, 2020).

Tujuan bab ini adalah memahami mengapa momentum sudut kuantum memiliki bilangan kuantum l dan m, mengapa harmonik bola muncul secara alami, serta mengapa simetri rotasi sangat menentukan bentuk solusi persamaan Schrödinger untuk atom dan sistem tiga dimensi.

12.1 Momentum sudut klasik sebagai titik awal

Dalam mekanika klasik, momentum linear sebuah partikel adalah

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

dengan m massa dan v kecepatan. Jika partikel berada pada posisi r relatif terhadap titik asal, momentum sudutnya didefinisikan sebagai

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Simbol × menyatakan hasil kali silang. Hasilnya adalah vektor yang tegak lurus terhadap bidang yang dibentuk oleh r dan p. Besar momentum sudut klasik adalah

$$L = rp \sin\theta,$$

dengan θ sudut antara r dan p.

Sebagai contoh, jika sebuah partikel bergerak melingkar berjari-jari r dengan momentum p yang selalu menyinggung lintasan, maka θ=90^circ, sehingga

$$L = rp.$$

Dalam mekanika klasik, kita dapat membayangkan vektor L memiliki tiga komponen pasti:

$$L_x, \qquad L_y, \qquad L_z.$$

Jika tidak ada torsi luar, momentum sudut klasik kekal. Dalam bahasa yang lebih dalam, kekekalan momentum sudut berkaitan dengan simetri rotasi: jika hukum fisika tidak berubah ketika sistem diputar, maka ada besaran yang kekal, yaitu momentum sudut. Hubungan antara simetri kontinu dan hukum kekekalan dirumuskan secara umum dalam teorema Noether (Noether, 1918).

Dalam mekanika kuantum, ide dasarnya tetap: momentum sudut berkaitan dengan rotasi. Tetapi karena posisi dan momentum menjadi operator, momentum sudut juga menjadi operator.

12.2 Dari vektor klasik ke operator kuantum

Dalam representasi posisi, operator posisi dan momentum ditulis sebagai

$$\hat{x} = x, \qquad \hat{y} = y, \qquad \hat{z} = z,$$

dan

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}.$$

Tanda topi, seperti pada hatx dan hatp$_x$, menunjukkan bahwa besaran tersebut adalah operator. Dalam bab ini, setelah maknanya jelas, kita sering menulis L$_x$ alih-alih hatL$_x$.

Secara kuantum, momentum sudut orbital didefinisikan dengan bentuk yang sama seperti dalam mekanika klasik:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Komponennya adalah

$$L_x = yp_z - zp_y,$$

$$L_y = zp_x - xp_z,$$

$$L_z = xp_y - yp_x.$$

Dalam representasi posisi, ini menjadi operator diferensial:

$$L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Operator-operator ini bekerja pada fungsi gelombang tiga dimensi,

$$\psi(x, y, z).$$

Misalnya, $L_{(z)}\psi$ berarti

$$L_z\psi = -i\hbar\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

Bentuk ini bukan sekadar definisi formal. Operator $L_{(z)}$ berhubungan dengan rotasi terhadap sumbu z. Jika sebuah fungsi gelombang diubah oleh rotasi kecil di sekitar sumbu z, perubahan infinitesimalnya ditentukan oleh $L_{(z)}$. Dengan kata lain, $L_{(z)}$ adalah generator rotasi terhadap sumbu z. Secara umum, momentum sudut adalah generator rotasi dalam mekanika kuantum (Sakurai & Napolitano, 2020; Shankar, 1994).

12.3 Generator rotasi: mengapa momentum sudut muncul?

Kita perlu memahami istilah generator dengan hati-hati.

Dalam matematika fisika, generator adalah operator yang menghasilkan transformasi kecil. Misalnya, operator momentum linear menghasilkan translasi kecil. Jika sebuah fungsi gelombang digeser sedikit sejauh a sepanjang sumbu x, operator yang terlibat adalah p_x. Demikian pula, jika fungsi gelombang diputar sedikit, operator yang terlibat adalah momentum sudut.

Untuk rotasi terhadap sumbu z sebesar sudut kecil δφ, operator rotasinya dapat ditulis

$$U_z(\delta\phi) \approx 1 - \frac{i}{\hbar}\delta\phi\, L_z.$$

Untuk rotasi hingga sudut φ, bentuknya menjadi eksponensial operator:

$$U_z(\phi) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\phi L_z\right).$$

Bentuk ini sejajar dengan operator evolusi waktu

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right),$$

dengan H sebagai generator translasi waktu. Jadi:

- Hamiltonian H menghasilkan pergeseran waktu.
- Momentum linear p menghasilkan pergeseran posisi.
- Momentum sudut L menghasilkan rotasi.

Hubungan antara transformasi simetri dan generatornya merupakan salah satu struktur utama mekanika kuantum modern (Sakurai & Napolitano, 2020).

12.4 Relasi komutasi momentum sudut

Pada Bab 9 kita belajar bahwa dua operator yang tidak komutatif tidak dapat, secara umum, memiliki nilai pasti bersamaan. Untuk momentum sudut, komutator antarkomponen sangat penting.

Komponen momentum sudut memenuhi

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z,$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x,$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y.$$

Dengan notasi indeks, ketiganya dapat diringkas sebagai

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k.$$

Di sini ε_{ijk} adalah simbol Levi-Civita, yaitu simbol yang bernilai +1, -1, atau 0 tergantung urutan indeksnya. Notasi ini sering dipakai agar persamaan vektor tiga dimensi dapat ditulis ringkas.

Relasi komutasi ini adalah ciri khas momentum sudut kuantum. Relasi yang sama juga muncul untuk spin, meskipun spin bukan berasal dari $r \times p$ (Sakurai & Napolitano, 2020).

Akibat pentingnya adalah:

$$L_x, \quad L_y, \quad L_z$$

tidak dapat semuanya memiliki nilai pasti sekaligus.

Sebagai contoh, karena

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z,$$

maka L_x dan $L_{(y)}$ tidak kompatibel sebagai observable, kecuali dalam keadaan khusus dengan struktur tertentu. Relasi ketidakpastian yang bersesuaian adalah

$$\Delta L_x \, \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2} \left| \langle L_z \rangle \right|.$$

Jadi, berbeda dari vektor klasik, momentum sudut kuantum tidak dapat selalu dibayangkan sebagai panah biasa dengan tiga komponen tajam.

12.5 Operator L^2 dan pilihan komponen $L_{(z)}$

Meskipun ketiga komponen $L_x, L_{(y)}, L_{(z)}$ tidak saling komutatif, ada satu operator yang sangat penting:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2.$$

Operator ini menyatakan kuadrat besar momentum sudut. Ia memenuhi

$$[L^2, L_x] = 0,$$

$$[L^2, L_y] = 0,$$

$$[L^2, L_z] = 0.$$

Artinya, L^2 komutatif dengan setiap komponen momentum sudut. Karena itu, kita dapat mencari keadaan yang merupakan eigenstate bersama dari L^2 dan salah satu komponen, biasanya $L_{(z)}$.

Mengapa memilih $L_{(z)}$? Tidak ada alasan fisik yang istimewa jika sistem benar-benar simetris terhadap rotasi. Kita memilih sumbu z karena konvensi dan kemudahan matematis. Dalam eksperimen, sumbu z sering ditentukan oleh medan luar, misalnya medan magnet.

Kita menulis eigenstate bersama sebagai

$$|l, m\rangle,$$

dengan

$$L^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle,$$

dan

$$L_z|l, m\rangle = \hbar m|l, m\rangle.$$

Untuk momentum sudut orbital,

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

dan untuk setiap l,

$$m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l.$$

Bilangan l disebut bilangan kuantum momentum sudut orbital, sedangkan m disebut bilangan kuantum magnetik. Nama “magnetik” muncul karena dalam medan magnet, energi sering bergantung pada orientasi momentum sudut terhadap medan, sehingga bergantung pada m.

Contoh:

- Jika l=0, maka m=0.

- Jika l=1, maka m=-1,0,1.

- Jika l=2, maka m=-2,-1,0,1,2.

Besar momentum sudut bukan hbar l, melainkan

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar.$$

Sementara itu, komponen sepanjang z adalah

$$L_z = m\hbar.$$

Ini menghasilkan fakta kuantum yang menarik. Untuk keadaan dengan l=1, besar momentum sudut adalah

$$\sqrt{2}\hbar,$$

tetapi nilai maksimum komponen z-nya hanya

$$\hbar.$$

Jadi, momentum sudut kuantum tidak pernah sepenuhnya "sejajar" dengan sumbu z dalam arti klasik. Jika $L_{(z)}$ tajam, komponen transversal L_x dan $L_{(y)}$ tetap memiliki ketidakpastian.

12.6 Operator tangga L_+ dan L_-

Seperti pada osilator harmonik, momentum sudut juga memiliki operator tangga. Kita definisikan

$$L_+ = L_x + iL_y,$$

$$L_- = L_x - iL_y.$$

Operator L_+ disebut operator penaik, sedangkan L_- disebut operator penurun. Keduanya memenuhi

$$[L_z, L_+] = \hbar L_+,$$

$$[L_z, L_-] = -\hbar L_-,$$

dan

$$[L^2, L_\pm] = 0.$$

Maknanya sebagai berikut. Jika |l,m⟩ adalah eigenstate dari L^2 dan $L_{(z)}$, maka L_+|l,m⟩ juga memiliki nilai l yang sama, tetapi nilai m-nya naik satu. Sebaliknya, L_-|l,m⟩ menurunkan m satu tingkat.

Secara eksplisit,

$$L_+|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,|l, m+1\rangle,$$

dan

$$L_-|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\,|l, m-1\rangle.$$

Contoh untuk l=1:

$$L_+|1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1, 0\rangle,$$

$$L_+|1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1, 1\rangle,$$

tetapi

$$L_+|1, 1\rangle = 0.$$

Keadaan |1,1⟩ adalah keadaan tertinggi untuk l=1, karena tidak ada keadaan |1,2⟩. Demikian pula,

$$L_-|1, -1\rangle = 0.$$

Struktur ini memperlihatkan mengapa nilai m terbatas dari -l sampai l. Jika operator penaik dapat diterapkan tanpa batas, maka nilai $L_{(z)}$ dapat menjadi lebih besar daripada besar total momentum sudut, yang tidak konsisten dengan struktur operator L^2. Penurunan aljabar ini merupakan salah satu cara paling elegan untuk memperoleh spektrum momentum sudut (Shankar, 1994; Sakurai & Napolitano, 2020).

12.7 Momentum sudut dalam koordinat bola

Momentum sudut berhubungan erat dengan rotasi, sehingga koordinat bola sangat alami.

Dalam koordinat bola, posisi ditulis dengan tiga variabel:

$$r, \qquad \theta, \qquad \phi.$$

Maknanya:

- r adalah jarak dari titik asal.
- θ adalah sudut polar dari sumbu z, dengan $0 \leq \theta \leq \pi$.
- φ adalah sudut azimut di bidang xy, dengan $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Hubungan dengan koordinat Kartesius adalah

$$x = r \sin\theta \cos\phi,$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi,$$

$$z = r \cos\theta.$$

Dalam koordinat bola, operator $L_{(z)}$ memiliki bentuk sangat sederhana:

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Ini masuk akal karena $L_{(z)}$ menghasilkan rotasi terhadap sumbu z, dan rotasi terhadap sumbu z hanya mengubah sudut φ.

Operator L^2 dalam koordinat bola adalah

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right].$$

Perhatikan bahwa L^2 hanya melibatkan θ dan φ, bukan r. Ini sesuai dengan makna fisiknya: momentum sudut berhubungan dengan gerak angular, bukan jarak radial.

Operator tangga dalam koordinat bola dapat ditulis

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right).$$

Bentuk ini berguna ketika kita bekerja langsung dengan fungsi gelombang sudut, terutama harmonik bola.

12.8 Eigenfunction L^2 dan $L_{(z)}$: harmonik bola

Dalam representasi posisi, eigenstate |l,m⟩ menjadi fungsi sudut

$$Y_l^m(\theta, \phi).$$

Fungsi ini disebut harmonik bola. Ia didefinisikan sebagai solusi bersama dari

$$L^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi),$$

dan

$$L_z Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar m Y_l^m(\theta, \phi).$$

Karena

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi},$$

persamaan eigenvalue untuk L₍z₎ menjadi

$$-i\hbar\frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} = \hbar m Y_l^m.$$

Membagi kedua sisi dengan hbar, kita peroleh

$$-i\frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} = m Y_l^m.$$

Solusi terhadap bagian φ berbentuk

$$e^{im\phi}.$$

Karena fungsi gelombang orbital harus bernilai tunggal ketika φ bertambah 2π, kita memerlukan

$$e^{im(\phi+2\pi)} = e^{im\phi}.$$

Ini berarti

$$e^{i2\pi m} = 1,$$

sehingga m harus bilangan bulat. Untuk momentum sudut orbital, syarat bernilai tunggal inilah yang membantu menjelaskan mengapa bilangan kuantum yang muncul adalah bilangan bulat. Dalam teori momentum sudut yang lebih umum, nilai setengah-bulat juga mungkin; itulah yang akan muncul pada spin (Sakurai & Napolitano, 2020).

Dengan konvensi fase Condon-Shortley, harmonik bola dapat ditulis

$$Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi},$$

untuk $m \geq 0$, dengan perluasan standar untuk $m<0$. Di sini P_l^m adalah fungsi Legendre terkait, yaitu keluarga fungsi yang muncul dari bagian sudut persamaan Laplace dan persamaan Schrödinger dengan simetri bola. Definisi dan sifat harmonik bola sebagai basis ortonormal di permukaan bola dibahas secara luas dalam metode matematika fisika (Arfken, Weber, & Harris, 2013).

Beberapa harmonik bola pertama adalah

$$Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_1^1(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi},$$

$$Y_1^{-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\phi}.$$

Contoh paling sederhana adalah Y_0^0. Fungsi ini konstan di seluruh arah. Artinya, keadaan dengan $l=0$ tidak memiliki preferensi arah. Dalam bahasa atom, keadaan seperti ini disebut keadaan s.

Untuk $l=1$, harmonik bola memiliki struktur angular yang lebih kaya. Misalnya,

$$Y_1^0 \propto \cos\theta.$$

Fungsi ini positif dekat sumbu +z, negatif dekat sumbu -z, dan nol di bidang ekuator $\theta=\pi/2$. Permukaan tempat fungsi gelombang nol disebut bidang nodal atau simpul. Struktur simpul seperti ini kelak penting dalam memahami bentuk orbital atom.

12.9 Ortonormalitas dan kelengkapan harmonik bola

Harmonik bola bukan hanya kumpulan fungsi khusus. Mereka membentuk basis untuk fungsi-fungsi sudut pada permukaan bola.

Pertama, harmonik bola bersifat ortonormal:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_l^m(\theta,\phi)^* Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)\sin\theta\,d\theta\,d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Simbol ^ menyatakan konjugat kompleks. Faktor

$$\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

adalah elemen luas sudut pada permukaan bola, sering ditulis

$$d\Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\phi.$$

Jadi, ortonormalitas dapat ditulis ringkas sebagai

$$\int Y_l^{m*} Y_{l'}^{m'}\,d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Kedua, harmonik bola bersifat lengkap. Artinya, fungsi sudut yang cukup baik dapat diekspansikan sebagai kombinasi linear harmonik bola:

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\phi).$$

Koefisiennya diperoleh dari proyeksi:

$$c_{lm} = \int Y_l^{m*}(\theta,\phi) f(\theta,\phi)\,d\Omega.$$

Ini mirip dengan deret Fourier. Dalam deret Fourier, fungsi periodik diekspansikan dalam basis e^{inx}. Pada bola, fungsi sudut diekspansikan dalam basis $Y_l^m(\theta,\varphi)$. Karena itu, harmonik bola dapat dipandang sebagai “deret Fourier untuk permukaan bola” (Arfken, Weber, & Harris, 2013).

12.10 Contoh: mengukur L^2 dan $L_{(z)}$

Misalkan sebuah partikel berada dalam keadaan angular

$$\psi(\theta, \phi) = Y_2^1(\theta, \phi).$$

Maka keadaan ini adalah eigenfunction dari L^2 dan $L_{(z)}$. Jika kita mengukur L^2, hasilnya pasti

$$\hbar^2 l(l+1) = \hbar^2(2)(3) = 6\hbar^2.$$

Jika kita mengukur $L_{(z)}$, hasilnya pasti

$$m\hbar = \hbar.$$

Tetapi jika kita mengukur L_x, hasilnya tidak memiliki satu nilai pasti, karena Y_2^1 bukan eigenfunction dari L_x. Ini adalah contoh konkret bahwa mengetahui L^2 dan $L_{(z)}$ secara pasti tidak berarti mengetahui semua komponen momentum sudut.

Sekarang pertimbangkan keadaan superposisi

$$\psi(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_1^0(\theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{2}} Y_1^1(\theta, \phi).$$

Kedua suku memiliki l=1, tetapi nilai m berbeda. Jika kita mengukur L^2, hasilnya pasti

$$\hbar^2(1)(2) = 2\hbar^2.$$

Tetapi jika kita mengukur $L_{(z)}$, ada dua kemungkinan:

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad L_z = 0,$$

atau

$$m = 1 \quad \Rightarrow \quad L_z = \hbar.$$

Karena amplitudo keduanya sama besar, probabilitas masing-masing adalah

(1) □ (2).

Ini memperlihatkan cara postulat pengukuran bekerja dalam basis momentum sudut: koefisien ekspansi menentukan probabilitas hasil ukur.

12.11 Ketidakpastian komponen momentum sudut

Untuk keadaan |l,m⟩, kita mengetahui L^2 dan $L_{(z)}$ dengan pasti. Namun L_x dan $L_{(y)}$ tidak pasti.

Karena

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2,$$

nilai harapan dalam keadaan |l,m⟩ memberi

$$\langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1).$$

Karena

$$\langle L_z^2 \rangle = m^2 \hbar^2,$$

maka

$$\langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle = \hbar^2 [l(l+1) - m^2].$$

Untuk keadaan |l,m⟩, simetri terhadap rotasi di sekitar sumbu z memberi

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle.$$

Jadi,

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [l(l+1) - m^2].$$

Selain itu,

$$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0.$$

Maka

$$(\Delta L_x)^2 = \frac{\hbar^2}{2}[l(l+1) - m^2],$$

dan

$$(\Delta L_y)^2 = \frac{\hbar^2}{2}[l(l+1) - m^2].$$

Contoh untuk $|1{,}1\rangle$:

$$(\Delta L_x)^2 = \frac{\hbar^2}{2}[1(2) - 1] = \frac{\hbar^2}{2},$$

dan

$$(\Delta L_y)^2 = \frac{\hbar^2}{2}.$$

Jadi,

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}.$$

Sementara itu,

$$\langle L_z \rangle = \hbar.$$

Relasi ketidakpastian

$$\Delta L_x \, \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2}|\langle L_z \rangle|$$

menjadi

$$\frac{\hbar^2}{2} \geq \frac{\hbar^2}{2}.$$

Untuk keadaan ini, batas ketidakpastian tercapai tepat.

12.12 Hubungan dengan persamaan Schrödinger tiga dimensi

Momentum sudut menjadi sangat penting ketika kita menyelesaikan persamaan Schrödinger dalam tiga dimensi.

Hamiltonian untuk partikel bermassa μ dalam potensial V(r) adalah

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\mathbf{r}).$$

Jika potensial hanya bergantung pada jarak dari pusat,

$$V(\mathbf{r}) = V(r),$$

maka potensial disebut potensial pusat. Contohnya adalah potensial Coulomb pada atom hidrogen,

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

yang hanya bergantung pada jarak elektron dari proton.

Untuk potensial pusat, sistem simetris terhadap rotasi. Tidak ada arah ruang yang istimewa. Akibatnya, Hamiltonian komutatif dengan operator momentum sudut:

$$[H, L^2] = 0,$$

dan

$$[H, L_z] = 0.$$

Karena itu, kita dapat memilih fungsi gelombang yang sekaligus merupakan eigenfunction dari H, L^2, dan $L_{(z)}$. Bentuknya dapat dipisahkan menjadi bagian radial dan bagian angular:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_l^m(\theta, \phi).$$

Di sinilah harmonik bola menjadi alat utama. Bagian angular dari fungsi gelombang ditentukan oleh simetri rotasi, sedangkan detail potensial V(r) masuk ke persamaan radial. Pemisahan variabel untuk potensial pusat adalah teknik standar dalam penyelesaian atom hidrogen dan sistem kuantum tiga dimensi lainnya (Griffiths & Schroeter, 2018).

Operator Laplace dalam koordinat bola dapat ditulis dalam bentuk yang menampilkan L^2:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}.$$

Maka energi kinetik menjadi

\[-frachbar□2

Document information

Bab 12: Momentum Sudut dalam Mekanika Kuantum

Project	Mekanika Kuantum
Document	Document 1.16
Author	terry.mart
Verifier	Not verified
Downloaded	July 06, 2026 03:36 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/mekanika-kuantum/documents/bab-12-momentum-sudut-dalam-mekanika-kuantum/