Bab 11: Osilator Harmonik Kuantum

Pada bab-bab sebelumnya kita telah membangun beberapa alat utama mekanika kuantum: fungsi gelombang, operator, nilai harapan, komutator, dan prinsip ketidakpastian. Sekarang kita akan memakai alat-alat itu pada salah satu sistem terpenting dalam seluruh fisika: osilator harmonik.

Secara klasik, osilator harmonik adalah sistem yang mendapat gaya pemulih sebanding dengan simpangannya. Contoh paling sederhana adalah massa yang terikat pada pegas ideal. Jika massa digeser sedikit dari titik setimbang, pegas menariknya kembali. Gaya klasiknya

$$F = -kx,$$

dengan k konstanta pegas dan x simpangan dari titik setimbang. Tanda minus berarti gaya selalu mengarah kembali ke titik setimbang.

Dalam mekanika kuantum, sistem yang sama dijelaskan oleh fungsi gelombang dan operator Hamiltonian. Hasilnya sangat penting: energi osilator harmonik tidak kontinu, melainkan terkuantisasi,

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ada dua hal mengejutkan di sini. Pertama, energi hanya boleh mengambil nilai-nilai tertentu yang berjarak sama. Kedua, energi terendah bukan nol, melainkan

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

Energi minimum ini disebut energi titik-nol. Ia bukan tambahan buatan, melainkan konsekuensi langsung dari struktur mekanika kuantum.

Osilator harmonik kuantum penting bukan hanya karena dapat diselesaikan secara eksak. Ia muncul hampir di mana-mana. Getaran kecil molekul, getaran kisi kristal, mode medan elektromagnetik, dan banyak sistem di sekitar titik setimbang dapat didekati sebagai osilator harmonik. Dalam fisika padatan, misalnya, kuantisasi getaran kisi mengarah pada konsep fonon, yaitu kuanta getaran kolektif dalam kristal (Kittel, 2005). Karena itu, bab ini adalah salah satu jembatan penting menuju fisika atom, molekul, padatan, dan teori medan.

Kita akan menyelesaikan osilator harmonik dengan dua cara. Pertama, dengan metode persamaan diferensial dalam representasi posisi. Kedua, dengan metode operator tangga, yang jauh lebih elegan dan memperlihatkan struktur aljabar sistem secara mendalam. Kedua pendekatan ini adalah penyajian baku dalam mekanika kuantum tingkat sarjana dan pascasarjana awal (Griffiths & Schroeter, 2018; Shankar, 1994).

11.1 Osilator harmonik klasik sebagai titik awal

Sebelum masuk ke kuantum, kita ingat kembali osilator harmonik klasik.

Misalkan sebuah partikel bermassa m bergerak dalam satu dimensi di bawah gaya

$$F = -kx.$$

Menurut hukum Newton,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Persamaan ini dapat ditulis

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

dengan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Besaran ω disebut frekuensi sudut. Satuannya radian per detik. Solusi klasiknya berbentuk sinusoidal, misalnya

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

dengan A amplitudo dan φ fase awal. Energi total klasiknya adalah

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Karena $k=m\omega^2$, energi juga dapat ditulis

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2.$$

Suku pertama adalah energi kinetik. Suku kedua adalah energi potensial. Maka potensial osilator harmonik adalah

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2.$$

Grafiknya berbentuk parabola dengan minimum di $x=0$.

Dalam fisika klasik, energi osilator harmonik dapat bernilai berapa saja selama $E \geq 0$. Jika amplitudo kecil, energinya kecil. Jika amplitudo besar, energinya besar. Tidak ada larangan terhadap energi antara dua nilai tertentu.

Mekanika kuantum mengubah kesimpulan ini.

11.2 Hamiltonian osilator harmonik kuantum

Dalam mekanika kuantum satu dimensi, posisi x menjadi operator hatx, momentum p menjadi operator hatp, dan keduanya memenuhi relasi komutasi kanonik

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Hamiltonian adalah operator energi total. Untuk osilator harmonik kuantum,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Dalam representasi posisi, operator momentum adalah

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}.$$

Maka Hamiltonian menjadi operator diferensial

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Untuk keadaan stasioner, fungsi gelombang dapat ditulis sebagai

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar},$$

dan ψ(x) memenuhi persamaan Schrödinger tak bergantung waktu:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x).$$

Jadi untuk osilator harmonik,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi = E\psi.$$

Inilah persamaan diferensial yang akan kita selesaikan.

11.3 Membaca bentuk fisik persamaan

Sebelum menyelesaikan persamaan, mari kita pahami bentuknya.

Potensial

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

menjadi sangat besar saat |x| besar. Artinya, partikel sangat “tidak disukai” berada jauh dari titik setimbang. Maka fungsi gelombang keadaan terikat harus menuju nol saat

$$x \to \pm\infty.$$

Syarat ini penting. Dalam mekanika kuantum, tidak semua solusi matematis persamaan diferensial diperbolehkan secara fisik. Fungsi gelombang harus dapat dinormalisasi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1.$$

Jika fungsi gelombang tidak menuju nol cukup cepat di tak hingga, integral tersebut akan divergen, sehingga fungsi itu tidak dapat ditafsirkan sebagai amplitudo probabilitas.

Jadi kita mencari solusi yang memenuhi dua syarat:

1. $\psi(x)$ memenuhi persamaan Schrödinger.
2. $\psi(x)$ ternormalisasi di seluruh garis real.

Syarat kedua inilah yang akan memaksa energi menjadi diskret.

11.4 Membuat persamaan menjadi tak berdimensi

Persamaan Schrödinger osilator harmonik adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi.$$

Agar bentuknya lebih sederhana, kita perkenalkan variabel tak berdimensi

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x.$$

Mengapa pilihan ini masuk akal? Karena kombinasi

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

memiliki dimensi panjang. Panjang ini adalah skala alami osilator kuantum. Kita sering menuliskannya sebagai

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Maka

$$\xi = \frac{x}{x_0}.$$

Artinya, xi mengukur posisi dalam satuan panjang kuantum alami osilator.

Dengan perubahan variabel ini,

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d}{d\xi},$$

sehingga

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2}{d\xi^2}.$$

Substitusi ke persamaan Schrödinger memberikan

$$-\frac{\hbar\omega}{2}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{\hbar\omega}{2}\xi^2\psi = E\psi.$$

Kalikan dengan 2/(hbarω):

$$-\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \xi^2\psi = \frac{2E}{\hbar\omega}\psi.$$

Definisikan

$$\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}.$$

Maka persamaannya menjadi

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\epsilon - \xi^2)\psi = 0.$$

Ini adalah bentuk tak berdimensi dari persamaan osilator harmonik kuantum.

11.5 Perilaku jauh dari pusat

Untuk |xi| sangat besar, suku xi² mendominasi dibandingkan ε. Persamaan mendekati

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi \approx 0.$$

Solusi yang secara kasar sesuai memiliki bentuk eksponensial

$$\psi(\xi) \sim e^{-\xi^2/2}$$

atau

$$\psi(\xi) \sim e^{+\xi^2/2}.$$

Solusi kedua tidak dapat dinormalisasi karena tumbuh sangat cepat saat |xi|→∞. Karena itu, solusi fisik harus memiliki faktor Gaussian menurun:

$$e^{-\xi^2/2}.$$

Maka kita coba bentuk

$$\psi(\xi) = h(\xi)e^{-\xi^2/2},$$

dengan h(xi) suatu fungsi yang belum diketahui.

Substitusi bentuk ini ke persamaan diferensial menghasilkan persamaan untuk h(xi):

$$\frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh}{d\xi} + (\epsilon - 1)h = 0.$$

Persamaan ini memiliki solusi polinomial hanya untuk nilai energi tertentu. Polinomial tersebut disebut polinomial Hermite. Secara lebih tepat, solusi ternormalisasi diperoleh ketika

$$\epsilon = 2n + 1, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Karena

$$\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega},$$

maka

$$\frac{2E_n}{\hbar\omega} = 2n + 1.$$

Jadi

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Inilah spektrum energi osilator harmonik kuantum. Turunan melalui polinomial Hermite ini adalah metode standar dalam penyelesaian persamaan Schrödinger osilator harmonik (Griffiths & Schroeter, 2018; Cohen-Tannoudji, Diu, & Laloë, 1977).

11.6 Fungsi gelombang keadaan energi

Fungsi gelombang eigenenergi osilator harmonik dapat ditulis

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-m\omega x^2/(2\hbar)},$$

dengan n=0,1,2,.... Di sini H_n(xi) adalah polinomial Hermite orde n.

Beberapa polinomial Hermite pertama adalah

$$H_0(\xi) = 1,$$

$$H_1(\xi) = 2\xi,$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2,$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi.$$

Maka beberapa fungsi gelombang pertama memiliki bentuk umum berikut.

Keadaan dasar, yaitu n=0, adalah

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

Ini adalah fungsi Gaussian. Ia maksimum di x=0 dan turun simetris ke kiri dan kanan.

Keadaan pertama, n=1, sebanding dengan

$$xe^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

Fungsi ini bernilai nol di x=0, positif di satu sisi, dan negatif di sisi lain.

Keadaan kedua, n=2, sebanding dengan

$$\left(2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right) e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

Ia memiliki dua titik simpul, yaitu titik tempat fungsi gelombang bernilai nol.

Secara umum, keadaan ke-n memiliki n simpul. Fakta ini sejalan dengan pola umum masalah keadaan terikat satu dimensi: semakin tinggi energi, semakin banyak osilasi dalam fungsi gelombang.

11.7 Paritas fungsi gelombang

Potensial osilator harmonik simetris terhadap perubahan

$$x \to -x.$$

Artinya,

$$V(-x) = V(x).$$

Jika potensial memiliki simetri kiri-kanan seperti ini, keadaan energi dapat dipilih memiliki paritas tertentu. Paritas berarti sifat fungsi terhadap pembalikan posisi.

Fungsi disebut genap jika

$$\psi(-x) = \psi(x),$$

dan disebut ganjil jika

$$\psi(-x) = -\psi(x).$$

Untuk osilator harmonik:

- ψ_0 genap,
- ψ_1 ganjil,
- ψ_2 genap,
- ψ_3 ganjil,

dan seterusnya.

Secara umum,

$$\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x).$$

Contohnya, keadaan dasar

$$\psi_0(x) \propto e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$$

jelas genap, karena x^2 tidak berubah ketika $x \to -x$. Keadaan pertama

$$\psi_1(x) \propto xe^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$$

ganjil, karena faktor x berubah tanda.

Paritas akan menjadi sangat berguna ketika kita membahas aturan seleksi dan transisi kuantum pada bab-bab berikutnya.

11.8 Energi titik-nol

Hasil spektrum energi

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

menunjukkan bahwa energi terendah terjadi pada n=0:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

Energi ini disebut energi titik-nol.

Mengapa energi minimum tidak boleh nol?

Secara klasik, osilator dapat memiliki energi nol jika partikel diam di titik setimbang:

$$x = 0, \qquad p = 0.$$

Tetapi dalam mekanika kuantum, posisi dan momentum tidak dapat sekaligus memiliki ketidakpastian nol. Relasi ketidakpastian Heisenberg menyatakan

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Jika partikel benar-benar berada tepat di x=0, maka Δ x=0, sehingga Δ p harus tak hingga. Jika momentumnya benar-benar nol, maka Δ p=0, sehingga Δ x harus tak hingga. Keduanya tidak dapat dipaksakan sekaligus.

Energi osilator mengandung dua bagian:

$$E = \left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \right\rangle .$$

Jika fungsi gelombang dibuat sangat sempit di sekitar x=0, energi potensial memang kecil, tetapi ketidakpastian momentum menjadi besar, sehingga energi kinetik meningkat. Jika fungsi gelombang dibuat sangat lebar, energi kinetik menurun, tetapi energi potensial meningkat. Keadaan dasar adalah kompromi optimal antara dua kecenderungan ini.

Untuk keadaan dasar osilator harmonik, diperoleh

$$\langle x \rangle = 0, \qquad \langle p \rangle = 0,$$

tetapi

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}},$$

dan

$$\Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}.$$

Maka

$$\Delta x \, \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

Keadaan dasar osilator harmonik mencapai batas minimum relasi ketidakpastian. Ini adalah salah satu alasan keadaan Gaussian sangat penting dalam mekanika kuantum (Shankar, 1994).

11.9 Contoh numerik: jarak antarenergi

Energi osilator harmonik berjarak sama:

$$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega.$$

Misalkan suatu mode getaran memiliki frekuensi sudut

$$\omega = 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Dengan

$$\hbar \approx 1.055 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s},$$

jarak antarenerginya adalah

$$\Delta E = \hbar\omega = (1.055 \times 10^{-34})(10^{13})\ \mathrm{J}.$$

Jadi

$$\Delta E = 1.055 \times 10^{-21}\ \mathrm{J}.$$

Dalam elektronvolt, gunakan

$$1\ \mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Maka

$$\Delta E = \frac{1.055 \times 10^{-21}}{1.602 \times 10^{-19}}\ \mathrm{eV} \approx 6.59 \times 10^{-3}\ \mathrm{eV}.$$

Jadi jarak antarenerginya sekitar

$$\Delta E \approx 6.6\ \mathrm{meV}.$$

Energi titik-nolnya setengah dari itu:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \approx 3.3 \text{ meV}.$$

Contoh ini menunjukkan bahwa skala energi kuantum bergantung langsung pada frekuensi osilator. Semakin besar ω, semakin jauh jarak antarlevel energi.

11.10 Mengapa metode operator tangga diperlukan?

Metode persamaan diferensial memberi jawaban lengkap, tetapi cukup panjang. Ada cara lain yang lebih pendek dan lebih konseptual: metode operator tangga.

Istilah “operator tangga” berarti operator yang menaikkan atau menurunkan keadaan energi. Jika keadaan |n⟩ memiliki energi E_n, maka operator tangga dapat mengubahnya menjadi keadaan |n+1⟩ atau |n-1⟩.

Analogi sederhananya seperti anak tangga. Keadaan energi osilator harmonik membentuk tangga dengan jarak yang sama:

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\dots$$

Operator tertentu membawa kita naik satu anak tangga, dan operator lain membawa kita turun satu anak tangga.

Metode ini sangat penting karena memperlihatkan bahwa kuantisasi energi dapat diperoleh dari aljabar operator, tanpa menyelesaikan persamaan diferensial secara eksplisit. Pendekatan aljabar seperti ini menjadi pusat banyak bagian mekanika kuantum modern, termasuk momentum sudut, teori medan kuantum, dan fisika banyak partikel (Cohen-Tannoudji, Diu, & Laloë, 1977; Shankar, 1994).

11.11 Mendefinisikan operator a dan a^†

Hamiltonian osilator harmonik adalah

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Kita ingin menulis Hamiltonian ini dalam bentuk yang menyerupai faktorisasi kuadrat. Dalam aljabar biasa, kita mungkin ingin menulis sesuatu seperti

$$p^2 + m^2\omega^2 x^2$$

sebagai hasil kali dua faktor. Tetapi dalam mekanika kuantum, hatx dan hatp tidak komutatif:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Karena itu, urutan operator penting.

Definisikan operator

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}.$$

Operator ini disebut operator penurun atau annihilation operator.

Definisikan pula

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}.$$

Operator ini disebut operator penaik atau creation operator.

Simbol † dibaca “dagger” dan berarti adjoint Hermitian. Karena hatx dan hatp adalah operator Hermitian, bentuk hata$^{(\dagger)}$ diperoleh dari hata dengan mengganti i→ -i dan mempertahankan hatx, hatp.

Operator hata dan hata$^{(\dagger)}$ bukan operator Hermitian. Jadi keduanya bukan observable langsung. Tetapi kombinasi keduanya dapat membentuk observable seperti posisi, momentum, dan energi.

11.12 Komutator hata dan hata$^{(\dagger)}$

Kita hitung komutator

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger].$$

Dengan definisi di atas dan relasi

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

diperoleh

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.$$

Relasi sederhana ini sangat kuat. Ia adalah inti aljabar osilator harmonik.

Sekarang kita tulis ulang posisi dan momentum dalam bentuk hata dan hata⁽†⁾. Dari definisi,

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger),$$

dan

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger).$$

Substitusi ke Hamiltonian menghasilkan

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right).$$

Perhatikan suku 1/2. Suku ini muncul karena hata dan hata⁽†⁾ tidak komutatif. Jika operator-operator itu komutatif seperti bilangan biasa, suku tambahan ini tidak muncul. Jadi energi titik-nol berkaitan langsung dengan struktur nonkomutatif mekanika kuantum.

11.13 Operator bilangan

Definisikan

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}.$$

Operator ini disebut operator bilangan. Nama ini akan menjadi sangat jelas sebentar lagi.

Hamiltonian menjadi

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right).$$

Jika |n⟩ adalah eigenstate hatN, maka

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle.$$

Akibatnya,

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle.$$

Jadi nilai eigen hatN menentukan tingkat energi.

Sekarang kita perlu menunjukkan bahwa n hanya dapat berupa bilangan bulat tak negatif.

Pertama, untuk sembarang keadaan |ψ⟩,

$$\langle\psi|\hat{N}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{a}^\dagger \hat{a}|\psi\rangle = \langle\hat{a}\psi|\hat{a}\psi\rangle = \|\hat{a}|\psi\rangle\|^2 \geq 0.$$

Jadi nilai eigen hatN tidak boleh negatif.

Kedua, gunakan komutator

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger,$$

dan

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}.$$

Jika

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle,$$

maka

$$\hat{N}(\hat{a}^\dagger|n\rangle) = (n+1)(\hat{a}^\dagger|n\rangle).$$

Jadi hata⁽†⁾|n⟩ adalah keadaan dengan nilai eigen n+1. Karena itu hata⁽†⁾ menaikkan nilai n satu satuan.

Demikian pula,

$$\hat{N}(\hat{a}|n\rangle) = (n-1)(\hat{a}|n\rangle).$$

Jadi hata|n⟩ menurunkan nilai n satu satuan.

Namun nilai eigen hatN tidak boleh negatif. Maka proses menurunkan harus berhenti. Keadaan terbawah |0⟩ harus memenuhi

$$\hat{a}|0\rangle = 0.$$

Dari keadaan dasar ini, semua keadaan lain dibangun dengan menerapkan hata⁽†⁾ berulang kali:

$$|1\rangle \propto \hat{a}^\dagger|0\rangle,$$

$$|2\rangle \propto (\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle,$$

dan seterusnya.

Dengan normalisasi yang tepat,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle.$$

Lebih lengkap,

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

dan

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

Koefisien akar muncul dari syarat normalisasi.

11.14 Menemukan keadaan dasar dari operator penurun

Keadaan dasar memenuhi

$$\hat{a}|0\rangle = 0.$$

Dalam representasi posisi, ini berarti

$$\hat{a}\psi_0(x) = 0.$$

Gunakan

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right).$$

Karena i(-i)=1, maka

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{\hbar}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\frac{d}{dx}.$$

Persamaan hataψ_0=0 menjadi

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\psi_0 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\frac{d\psi_0}{dx} = 0.$$

Kalikan dengan √(2mhbarω)/hbar, diperoleh

$$\frac{d\psi_0}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar} x\psi_0 = 0.$$

Ini persamaan diferensial orde satu:

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x\psi_0.$$

Pisahkan variabel:

$$\frac{1}{\psi_0}\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x.$$

Integralkan:

$$\ln \psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + C.$$

Maka

$$\psi_0(x) = Ae^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

Normalisasi menentukan

$$A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}.$$

Jadi

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

Ini sama dengan hasil dari metode persamaan diferensial. Tetapi metode operator mendapatkannya jauh lebih cepat.

11.15 Membangun keadaan tereksitasi

Setelah memperoleh keadaan dasar, keadaan tereksitasi dibangun dengan operator penaik:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle.$$

Dalam representasi posisi, ini berarti fungsi gelombang ψ$_n$(x) dapat diperoleh dengan menerapkan operator hata$^{(\dagger)}$ pada ψ$_0$(x) sebanyak n kali.

Untuk n=1,

$$|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle.$$

Fungsi gelombangnya sebanding dengan

$$xe^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

Untuk n=2,

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle,$$

dan fungsi gelombangnya sebanding dengan

$$\left(2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right)e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}.$$

Setiap penerapan hata$^{(\dagger)}$ menaikkan energi sebesar hbarω. Karena itu, energi keadaan ke-n adalah

$$E_n = E_0 + n\hbar\omega.$$

Dengan

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega,$$

diperoleh

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

11.16 Makna fisik operator penaik dan penurun

Operator hata(†) menaikkan tingkat energi satu kuantum:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Operator hata menurunkan tingkat energi satu kuantum:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

Karena jarak antarenergi selalu

$$\hbar\omega,$$

kita dapat mengatakan bahwa hata(†) menambahkan satu kuantum energi osilator, sedangkan hata menghilangkan satu kuantum energi osilator.

Dalam konteks getaran kisi, kuantum getaran disebut fonon. Dalam konteks medan elektromagnetik terkuantisasi, kuantum medan elektromagnetik adalah foton. Walaupun bab ini hanya membahas satu osilator harmonik, struktur matematis hata dan hata(†) menjadi dasar bahasa kuanta dalam banyak sistem fisika (Kittel, 2005; Cohen-Tannoudji, Diu, & Laloë, 1977).

Namun penting untuk berhati-hati: untuk satu partikel dalam potensial harmonik, hata(†) tidak menciptakan partikel baru. Ia hanya menaikkan keadaan energi partikel yang sama. Istilah “creation” dan “annihilation” menjadi harfiah dalam teori medan kuantum atau sistem banyak partikel, tetapi dalam osilator satu partikel istilah itu berarti menaikkan atau menurunkan tingkat eksitasi.

11.17 Posisi dan momentum dalam basis energi

Karena

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger),$$

kita dapat melihat bagaimana operator posisi menghubungkan keadaan energi.

Jika hatx bekerja pada |n⟩,

$$\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}|n\rangle + \hat{a}^\dagger|n\rangle\right).$$

Gunakan aksi operator tangga:

$$\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle\right).$$

Jadi operator posisi hanya menghubungkan |n⟩ dengan |n-1⟩ dan |n+1⟩.

Demikian pula,

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger),$$

sehingga

\

Document information

Bab 11: Osilator Harmonik Kuantum

Project	Mekanika Kuantum
Document	Document 1.15
Author	terry.mart
Verifier	Not verified
Downloaded	July 05, 2026 00:53 KST
Status	Working
Document link	https://www.theorytrace.com/projects/mekanika-kuantum/documents/bab-11-osilator-harmonik-kuantum/